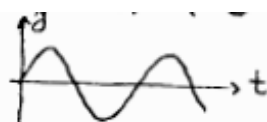


سیگنال گسسته

۱-۳ طبقه بندی سیستمها

۱-سیگنال پیوسته و گسسته



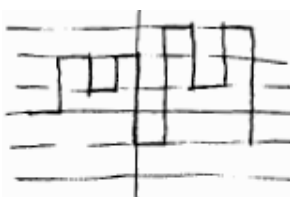
- **سیگنال پیوسته Analog:** سیگنالی که هم تابع و هم متغیر مستقل آن (معمولا زمان) پیوسته هستند. $y(t) = \sin(\omega t)$ ، سیگنال های مدارهای آنالوگ در این گروه قرار دارند



- **سیگنال گسسته Discrete:** سیگنالی است که در آن متغیر مستقل گسسته است. در این سیگنال تابع مقدار پیوسته دارد. مانند $y(nT) = \sin(n\omega T)$ که در آن T پریود نمونه برداری است. این سیگنال در مدارهای *switched capacitors* (خازنهای سوئیچ شونده) دیده می شود.



- **سیگنال دیجیتالی Digital:** در این نوع سیگنال ها هم متغیر مستقل و هم تابع گسسته هستند. این سیگنال در نرم افزار و سخت افزارهای دیجیتالی و کامپیوتری دیده می شود.

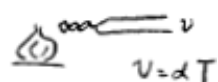


- **سیگنال کوانتیزه Quantized:** سیگنالی است که در آن متغیر مستقل پیوسته ولی تابع، کوانتیزه است. این سیگنال در خروجی D/A با ZOH دیده می شود.

۲-سیگنال حقیقی و کمپلکس

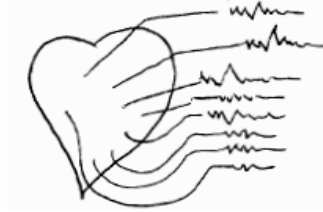
- **سیگنال حقیقی** سیگنالی است که مقدار آن حقیقی است $x(n) = A \sin(n\omega)$
- **سیگنال کمپلکس:** سیگنالی است که مقدار کمپلکس (دامنه و فاز) دارد. $x(n) = A e^{j\omega n} = A \cos n\omega + j A \sin(n\omega)$

۳-سیگنال تک و چند کاناله



- **سیگنال تک کاناله:** سیگنالی است که از یک منبع تولید می شود مثل ولتاژ ترموکوپل

- **سیگنال چند کاناله:** سیگنالی است که از چند کانال دریافت می شود. مانند سیگنال ۸ کاناله ECG که در شکل نشان داده شده



$$S(n) = \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_m(n) \end{bmatrix}$$

است و توسط ۸ پرب گرفته می شود. این سیگنال ها با یک بردار نمایش داده می شوند.

۴- سیگنال تک و چند بعدی

- **سیگنال یک بعدی**: این سیگنال فقط یک متغیر مستقل دارندمانند سیگنال صوت که متغیر مستقل آن زمان است.
- **سیگنال چند بعدی**: سیگنالی که دارای بیش از یک متغیر مستقل است. شدت روشنایی در یک عکس تابع مختصات نقطه (x, y) است. در یک سیگنال ویدئویی سیاه و سفید و شدت روشنایی تابع n_{ff} و هم مختصات نقطه (x, y) است در این سیگنال

$$S(x, y, n) = \begin{bmatrix} r(x, y, n) \\ b(x, y, n) \\ g(x, y, n) \end{bmatrix}.$$

n_{ff} گسسته و فریم به فریم است. یک سیگنال رنگی ویدئویی سیگنالی ۳ بعدی و ۳ کاناله است.

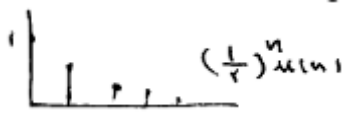
۵- **سیگنال انتگرال (جمع) قدر مطلق محدود**: این سیگنال ها دسته مهمی از سیگنال ها را تشکیل می دهند این سیگنال ها پایدارند و برای آنها تبدیل در میدان های مختلف وجود دارد مانند میدان S ، میدان فرکانس

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

۶- **سیگنال انرژی**: سیگنالی است که انتگرال (جمع) توان دوم محدود دارد

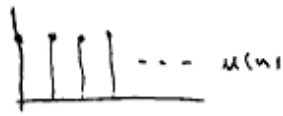
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

مثال: سیگنال $x(n) = (1/2)^n u(n)$ ، سیگنال انرژی است.



$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^{2n} = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3} < \infty$$

مثال: سیگنال پله $x(n) = u(n)$ سیگنال انرژی نیست



$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty} u^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

۷- **سیگنال توان**: سیگنالی است که توان متوسط محدود دارد.

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

مثال: سیگنال پله $x(n) = u(n)$ یک سیگنال توان است.

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

مثال: سیگنال کمپلکس $x(n) = Ae^{j\omega n}$ یک سیگنال توانی است.

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |Ae^{j\omega n}|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2N+1}{2N+1} \right) A^2 = A^2$$

سیگنال های پریودیک که دارای دامنه های محدود هستند، همگی سیگنالهای توان می باشند.

به این ترتیب $\delta(n)$ سیگنال انرژی، $u(n)$ سیگنال توان و $u_r(n)$ سیگنال شبیهی که در آن هم انرژی و هم توان نامحدود است و نه سیگنال

انرژی و نه سیگنال توان است.

۸- سیگنال پریودیک و غیر پریودیک

- سیگنال پریودیک سیگنالی است که برای آن می توان نوشت

$$x(n + \ell N) = x(n)$$

$$\ell = -\infty \rightarrow \infty$$

آنگونه که $N > 0$ باشد به N پریود سیگنال می گویند.

انرژی سیگنال پریودیک نامحدود است ولی اگر دامنه محدود داشته باشد توان متوسط آن محدود خواهد بود مقدار توان متوسط از رابطه مقابل بدست می آید

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

- سیگنال آپریودیک: سیگنالی که پریودیک نباشد آپریودیک (غیر پریودیک) است.

۹- سیگنال مزدوج متقارن و مزدوج معکوس

- سیگنال مزدوج متقارن: سیگنالی است که رابطه $x(n) = x^*(-n)$ را ارضا می کند. اگر $x(n)$ حقیقی باشد این رابطه $x(n) = x(-n)$ می گردد و به آن سیگنال زوج می گویند برای هر سیگنالی میتوان سیگنال مزدوج متقارن از رابطه ذیل بدست آورد.

$$x_{cs} = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد

$$x_e = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)]$$

- سیگنال مزدوج معکوس: سیگنالی است که در رابطه $x(n) = -x^*(-n)$ مقابل صدق می کند. اگر $x(n)$ حقیقی باشد به این سیگنال سیگنال فرد می گویند برای هر سیگنالی می توان سیگنال مزدوج معکوس محاسبه کرد.

$$x_{ca} = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$$

اگر $x(n)$ حقیقی باشد

$$x_o = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)]$$

از سیگنالهای زوج و فرد و مزدوج متقارن و مزدوج معکوس می توان سیگنال اصلی را بدست آورد.

$$x(n) = x_{cs}(n) + x_{ca}(n)$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

این تجزیه ها کاربرد صرفه جویی در عملیات محاسباتی را دارد.

۱۰- سیگنال طول محدود و نامحدود

- سیگنال طول نامحدود: سیگنالی است که طول آن نامحدود باشد مانند $(0.5)^n$ برای $n \geq 0$ طول این سیگنال نامحدود است.

- سیگنال طول محدود: سیگنالی است که طول آن محدود باشد مانند $x(n) = \{1, 2, 5, 10\}$ که طول آن $N = 4$ است.

در سیگنال های طول محدود تعریف سیگنال مزدوج متقارن و مزدوج معکوس تغییر می کند. اگر از تعاریف قبلی استفاده شود و طول $x(n)$ مقدار N باشد x_{cs} و x_{ca} طول $2N+1$ پیدا می کنند که درست نیست. لذا برای این سیگنالها سیگنال مزدوج متقارن پریودیک و مزدوج معکوس پریودیک تعریف می گردد.

$$x_{pcs} = \frac{1}{2} [x(n) + x^*((-n)_N)]$$

$$0 \leq n \leq N-1$$

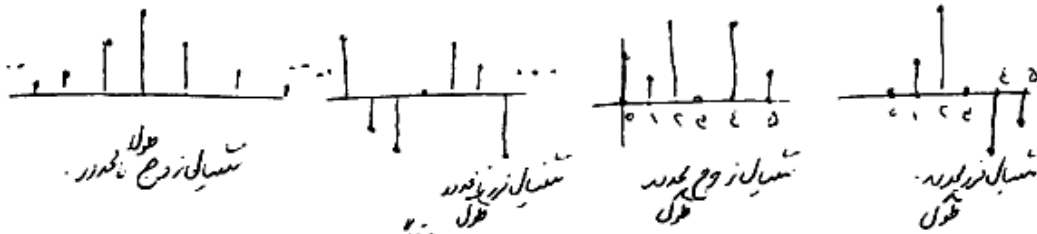
$$x_{pca} = \frac{1}{2} [x(n) - x^*((-n)_N)]$$

$k > N$ مقداری بین صفر تا N را بخود می گیرد. اگر k بزرگتر از N باشد، مضارب صحیح N از آن برون کشیده می شود. اگر k منفی

باشد، مضارب N در آن حذف و مقداری که بین 0 تا $(N-1)$ - که بدست می آید با N جمع می گردد.
مثال:

$$\begin{aligned} \langle 5 \rangle_8 &= 5, & \langle 8 \rangle_8 &= 0, & \langle 17 \rangle_8 &= 1, & \langle -1 \rangle_8 &= 7, \\ \langle -15 \rangle_8 &= 1, & \langle -33 \rangle_8 &= 7, \end{aligned}$$

مثال: شکل ها نمونه هایی از سیگنالهای فرد و زوج با طول محدود و نا محدود را نشان می دهند.



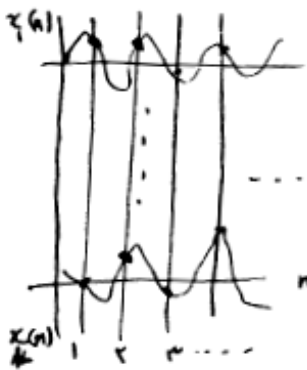
۱۱- معین و تصادفی

• سیگنال معین *Deterministic*:

سیگنالی است که آنرا با رابطه ای ریاضی برای تمام زمانهای از گذشته تا آینده بتوان نوشت که مقدار واقعی آنرا در هر لحظه نشان دهد. به عبارت دیگر سیگنال معین سیگنالی است که علم کامل به آن وجود دارد. با این تعریف بنظر می رسد که سیگنال معین وجود خارجی نداشته باشد. ولی این امر به دقت مورد نظر بستگی دارد. اگر دقیق نباشیم بنحوی که بتوان از اثر کنترل نشده عوامل نا خنثاسته و یا اجتناب نا پذیر اغماض کرد، می توان سیگنال معین را تصور نمود.

• سیگنال تصادفی *Random*:

مقدار سیگنال تصادفی در زمان t را فقط می توان بصورت احتمالی پیش بینی کرد، اگر میانگین، واریانس و تابع چگالی احتمالی آن در دسترس باشد. بنابراین پیش بینی این سیگنالها بر اساس ۲ کمیت و یک تابع قابل انجام می باشد. برای مثال به ولتاژ نوین حرارتی یک مجموعه مقاومت همسان توجه کنید. ولتاژ دو سر مقاومت نوینی است. به ولتاژ زمانی دو سر هر مقاومت تابع نمونه *sample function* می گویند $x_1(n)$. اگر تعداد مقاومتها L باشد، مجموعه L تابع نمونه خواهیم داشت که یک فرایند تصادفی *stochastic process* را می سازند. شکل مجموعه مشاهدات این فرایند را نشان می دهد. مجموعه مشاهدات $x_{i=1 \dots L}(n=1 \dots N)$ همچنانکه اشاره شد، یک تابع نمونه N تایی است که L تا از آنها موجود است. ازطرفی $x_{i=1 \dots L}(n=j)$ یک مجموعه L تایی متغیر تصادفی است که N تا از آنها وجود دارد. همچنین $x_{i=j}(n=j)$ یک عدد است. مقدار میانگین و واریانس متغیر تصادفی اینگونه بدست می آید.



$$\bar{X}(i) = E(X(i)) = \int_{-\infty}^{\infty} x P_X(x, i) dx = m_{x(i)}$$

$$\sigma_{x(i)}^2 = E(X^2(i)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P_X(x, i) dx$$

در تحلیل آماری مقدار میانگین و واریانس اینگونه محاسبه می گردد.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n(i), \sigma_{x(i)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x_n(i) - m_{x(i)})^2$$

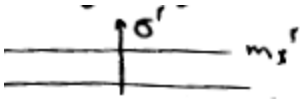
فرایند تصادفی که در آن میانگین و واریانس مستقل از n باشند، فرایند تصادفی ایستا به این معنی که

$$\sigma_{X(i)}^2 = \sigma_X^2, \hat{m}_{X(i)} = \hat{m}_X$$

است. اگر سیگنال ارگودیک باشد، میانگین و واریانس را می توان از میانگین و واریانس تابع نمونه بدست آورد.

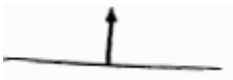
$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} x_i(n), \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (x_i(n) - \hat{m})^2, \quad P_X = E(X^2) = \sigma_x^2 + m_x^2$$

به فرایند تصادفی که تابع خود همبستگی آن تابع ضربه است $\delta(l)$ فرایند تصادفی سفید می گویند.



$$\varphi_{xx}(\ell) = E(x(n)x(n-\ell)) = \sigma^2 \delta(\ell) + m_x^2$$

فرایند تصادفی سفید که میانگین آن صفر باشد، نویز سفید خوانده می شود.

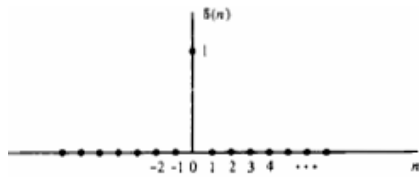


$$\varphi_{xx}(\ell) = \sigma^2 \delta(\ell)$$

سیگنال تصادفی یک سیگنال انرژی و یا یک پریودیک توانی نیست که بتوان برای آن فوریه نوشت، ولی تابع خود همبستگی آن دارای تبدیل فوریه هست و بخش مهمی از اطلاعات سیگنال را با خود دارد.

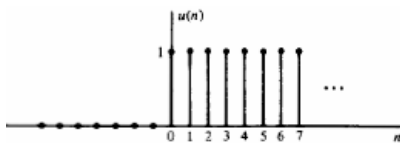
۲-۳ دنباله های اصلی (سیگنال های گسسته)

۱-دنباله ضربه واحد



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$$

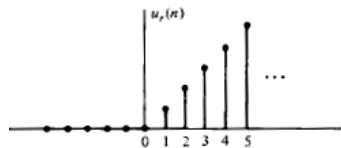
۲-دنباله پله واحد



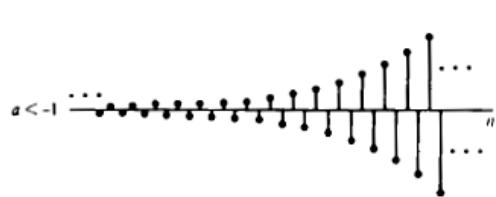
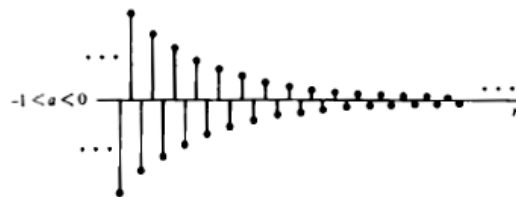
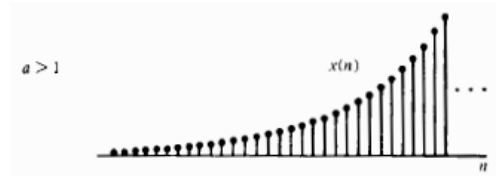
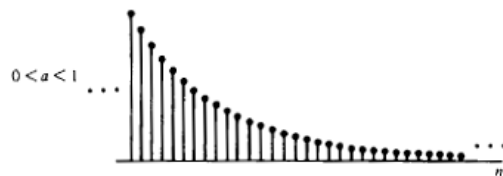
$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

دنباله پله واحد و دنباله ضربه واحد با روابط مقابل به یکدیگر مرتبط می شوند

۳-دنباله شیبی واحد



$$u_r(n) = \begin{cases} n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

۴-دنباله اکسپونانسیل اگر A و a حقیقی باشند دنباله $x(n) = Aa^n$ یک دنباله اکسپونانسیلی حقیقی است.

۵-دنباله های مثلثاتی: سیگنال مثلثاتی آنالوگ مثلاً با $ACos(\Omega t + \theta)$ بیان می شود که A دامنه $\Omega = 2\pi F$ فرکانس زاویه (رادیان بر ثانیه)، F فرکانس (هرتز) و θ فاز بر حسب رادیان است این سیگنال ها، سیگنال های پریودیک با پریود $T = 1/F$ هستند. هرچه F بزرگ تر باشد فرکانس نوسانات بیشتر است. این مشخصات را سیگنال کمپلکس $Aexp(j(\Omega t + \theta))$ نیز دارد. در نمایش برداری، سیگنال مثلثاتی را بصورت

$$ACos(\Omega t + \theta) = A \frac{e^{j(\Omega t + \theta)} + e^{-j(\Omega t + \theta)}}{2}$$

می نویسند که کسینوس از مجموع دو بردار که یکی بفرکانس زاویه Ω و دیگری با فرکانس زاویه $-\Omega$ است بدست می آید اگرچه Ω در اصل یک کمیت مثبت است ولی تعریف $-\Omega$ صرفاً به منظور تسهیل ریاضی معرفی می گردد.

وقتی سیگنال پیوسته بصورت گسسته نوشته شود رابطه به شکل

$$ACos(\Omega nTs + \theta) = ACos(n\omega + \theta)$$

در می آید. به ω در اینجا فرکانس زاویه با دیمانسیون رادیان بر نمونه (فرکانس نمونه گیری) می گویند چرا که $\omega = \Omega Ts$ یا $\omega = \Omega / Fs$ است ماهیت فرکانس در ω با Ω فرق دارد. معادل دیجیتالی فرکانس آنالوگ F فرکانس دیجیتالی $fd = F/Fs$ است که حاصل نسبت با فرکانس نمونه برداری است. فرکانس دیجیتالی فقط مقدار بین ۰ تا ۱ را به خود می گیرد، به همین ترتیب ω نیز مقادیر بین ۰ تا 2π را به خود می گیرند، چرا که دو فرکانس ωk و $\omega k + 2k\pi$ که $\omega k = \omega + 2k\pi$ باشد از یکدیگر قابل تمییز هستند. بنابراین در سیگنال های گسسته حداکثر فرکانس سیگنال فرکانس بالا، $\omega = \pi$ است. با این توضیحات سیگنال های فرکانس پائین سیگنال هایی هستند که $\omega = 2k\pi$ و فرکانس بالایی آنها $\omega = (2k+1)\pi$ هستند که دارند.

پریود و فرکانس سیگنال گسسته: فرکانس دیجیتالی معادل فرکانس آنالوگ F برابر $fd = F/F_s$ است که بصورت کسری $fd = k/N$ بدست می آید که در آن N پریود اصلی سیگنال است. این امر با سیگنال گسسته که $F = 1/T$ است تفاوت پیدا می کند. اگر fd کسری نباشد سیگنال پریودیک نیست، در رابطه

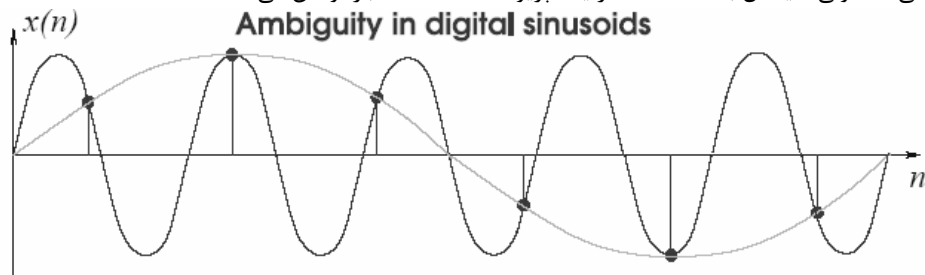
$$\cos(\sqrt{3}n + \theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{3} \Rightarrow f_w = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \neq \frac{k}{N}$$

که fd کسری نیست برای N عدد صحیح بدست نمی آید و سیگنال گسسته مربوطه پریودیک نیست. ولی در $\cos(n\pi/3 + \theta)$ مقدار $fd = \omega/(2\pi) = \pi/(2 \cdot 3 \cdot \pi) = 1/6 = k/N$ بدست می آید که $N=6$ و $k=1$ است.

مثال: سیگنال $\cos(2\pi Ft)$ با فرکانسهای ۵۰۰ و ۲۵۰۰ با فرکانس ۳۵۰۰ هرتز نمونه برداری می شوند مقدار پریود سیگنال گسسته را بدست آورید.

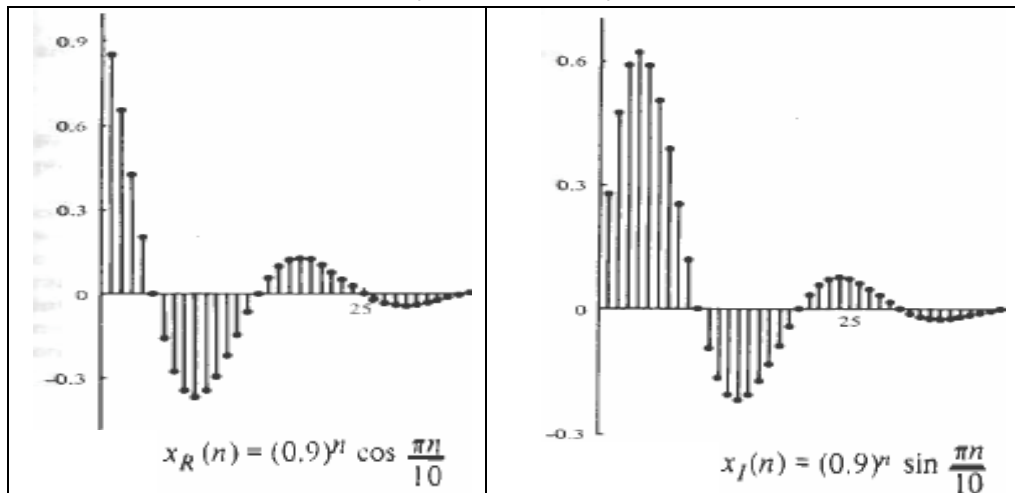
حل: وقتی $F=500$ است فرکانس دیجیتالی $fd = 500/3500 = 1/7$ بدست می آید که $N=7$ و $k=1$ می گردد. شکل نقاط پریود را نشان می دهد.

وقتی $F=2500$ باشد فرکانس دیجیتالی $fd = 2500/3500 = 5/7$ بدست می آید که $N=7$ و این بار $k=5$ است. در هر دو حال پریود سیگنال گسسته $N=7$ است ولی تفاوت در مقادیر k است. مفهوم این تفاوت از اینقرار است که: سیگنال با $F=500$ در یک پریود گسسته $k=1$ بار نوسان می کند ولی سیگنال با $F=2500$ در یک پریود گسسته $k=5$ بار نوسان می کند.



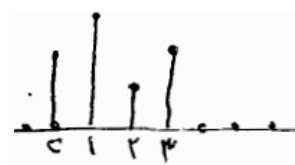
۶- سیگنال اکسپونانسیل کمپلکس

$$x(n) = |A| e^{j\phi} |a|^n e^{j(n\omega + \phi)} = |A| |a|^n [\cos(n\omega + \phi) + j \sin(n\omega + \phi)]$$



۷- نمایش یک دنباله دلخواه: هر سیگنال دلخواه را می توان بصورت مجموعه ای از توابع ضربه با تاخیر نوشت.

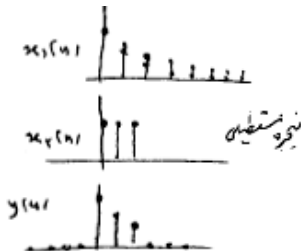
$$x(n) = \delta(n) + 1.5\delta(n-1) + 0.5\delta(n-2) + \delta(n-3)$$



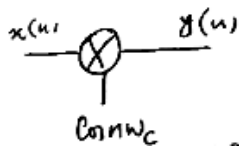
۳-۳ عملیات کلاسیک پردازش

۱-۳-۳ ضرب دو سیگنال

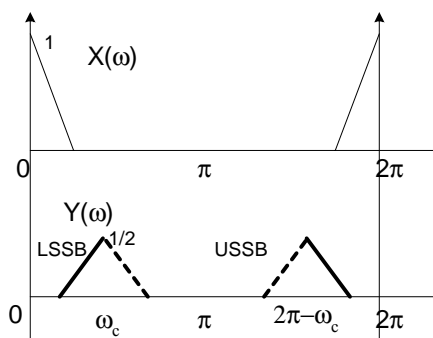
از ضرب دو سیگنال $x_1(n)$ و $x_2(n)$ سیگنال جدید بدست می آید $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$ که ۲ نوع کاربرد دارد.



۱- اعمال پنجره و تولید سیگنال طول محدود: اولین استفاده از ضرب تولید سیگنال طول محدود از سیگنال طول نامحدود در این مورد استفاده مثلاً سیگنال $x_2(n)$ سیگنالی دلخواه با طول محدود که در $x_1(n)$ با طول نامحدود ضرب شده و سیگنال طول محدود جدیدی را بدست می آید به این عمل اعمال پنجره بر سیگنال می گویند.



۲- مدولاسیون و دمدولاسیون: یکی از کاربردهای ضرب، عمل مدولاسیون است که به نرم افزار یا سخت افزار انجام دهنده آن مدولاتور می گویند. از کاربردهای مدولاسیون انتقال سیگنال از باند پایه به باند فرکانس حامل (انتشار) است. مدولاسیون دامنه سیگنال گسسته بصورت زیر نوشته می شود

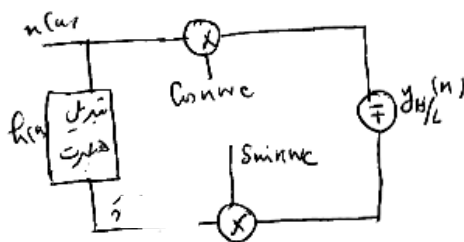


$$y(n)=x(n)\cos(n\omega_c)$$

در این رابطه ω_c فرکانس حامل ، $\cos(n\omega_c)$ سیگنال حامل ، $x(n)$ سیگنال مدوله کننده و $y(n)$ سیگنال مدوله شده است . طیف فرکانس سیگنال مدوله شده نسبت به مدوله کننده از این قرار است .

$$Y(\omega)=1/2[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)]$$

طیف مدولاسیون بصورت *Double Side Band (DSB)* است. وقتی سیگنال حقیقی است. بدلیل تقارن در طیف ، نیمی از طیف اضافی است که می توان آن را حذف و در پهنای باند صرفه جویی نمود. یعنی بجای *DSB* می توان از *Single Side Band (SSB)* سود برد. شکل طیف *Upper SSB* را نقطه چین و *Lower SSB* را با خط پر نشان داده است. برای ایجاد *U/L SSB* از مدار شکل می توان استفاده کرد.



تبدیل هیلبرت *Hilbert Transform* دارای مشخصات ذیل است

$$H(\omega)=\begin{cases} -j & 0 \leq \omega \leq \pi \\ j & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \Rightarrow h(\omega)=\begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{2\sin^2(n\pi/2)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases}$$

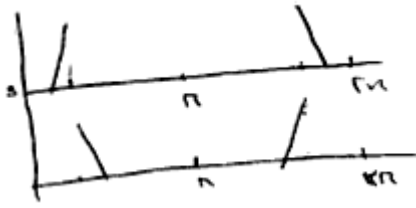
و تبدیل هیلبرت پیوسته از اینقرار است .

$$H(\Omega)=\begin{cases} -j & \Omega \geq 0 \\ j & \Omega < 0 \end{cases} \Rightarrow h(t)=\frac{1}{\pi}$$

$$Y_{H/L}(n)=x(n)\cos(n\omega_c)-/+x(n)\sin(n\omega_c) \Rightarrow$$

$$Y_{H/L}(\omega)=\frac{1}{2}[x_1(\omega-\omega_c)+x_1^*(\omega-\omega_c)+x_1(\omega+\omega_c)+x_1^*(\omega+\omega_c)] \mp$$

$$\frac{1}{2j}[-jx_1(\omega-\omega_c)+jx_1^*(\omega-\omega_c)-(-j)x_1(\omega+\omega_c)-jx_1^*(\omega+\omega_c)]$$

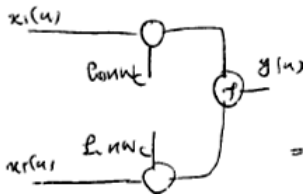


$$\Rightarrow Y_H(\omega) = x_1(\omega + \omega_c) + x_1^*(\omega - \omega_c)$$

$$Y_L(\omega) = x_1(\omega - \omega_c) + x_1^*(\omega + \omega_c)$$

Quadrature Amplitude Modulation(QAM)

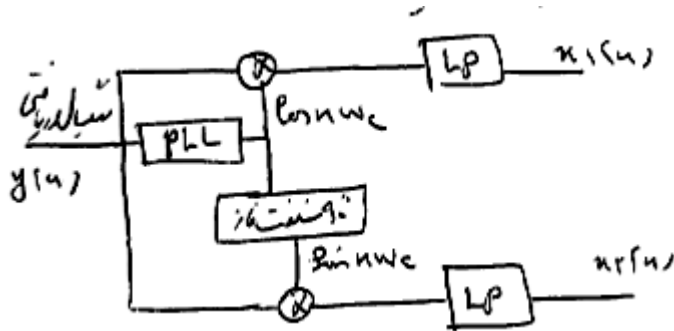
در این روش مدولاسیون هر باند کناری به یک سیگنال اختصاص می یابد به نحویکه دو سیگنال متفاوت DSB را اشغال می کنند. شکل روش مدولاسیون QAM را نشان می دهد.



$$y(n) = x_1(n) \cos n\omega_c + x_2(n) \sin n\omega_c$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} [X_1(\omega - \omega_c) + X_1(\omega + \omega_c)] - \frac{j}{2} [X_2(\omega - \omega_c) + X_2(\omega + \omega_c)]$$

علیرغم اینکه دو طیف با یکدیگر همپوشانی دارند. امکان بازسازی هر دو سیگنال و دمدولاسیون وجود دارد که شکل آنرا نشان می دهد.



$$x_1(n) = y(n) \cos n\omega_c = \frac{1}{2} x_1(n) + \frac{1}{2} x_1(n) \cos(2n\omega_c) + \frac{1}{2} x_2(n) \sin(2n\omega_c) \stackrel{LP\text{filtered}}{=} \frac{1}{2} x_1(n)$$

$$x_2(n) = y(n) \sin n\omega_c = \frac{1}{2} x_1(n) \sin(2n\omega_c) + \frac{1}{2} x_2(n) - \frac{1}{2} x_2(n) \sin(2n\omega_c) \stackrel{LP\text{filtered}}{=} \frac{1}{2} x_2(n)$$

۲-۳-۳ کانولوشن دو سیگنال:

کانولوشن در سیگنال $x_1(n)$ و $x_2(n)$ اینگونه تعریف می شود.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

این رابطه یکی از پر استفاده ترین عملیاتی است که روی سیگنال ها صورت می گیرد. این رابطه نحوه تاثیر سیستمها بر سیگنال ورودی را تعیین می کند. برای مثال چگونگی رفتار فیلتر بر سیگنال ورودی در میدان زمان با این رابطه بیان می شود که $x_1(n)$ سیگنال ورودی $x_2(n)$ پاسخ ضربه فیلتر باشد.

۳-۳-۳ تبدیل سیگنال به تابع کمپلکس خاص

بخش مهمی از اطلاعات سیگنال حقیقی که در طبیعت وجود دارد از این عمل استخراج می گردد. یک نمونه از این توابع فوریه است.

$$X(\omega) = \text{Fourier}(x(n)) = |X(\omega)| e^{-j\theta}$$

۴-۳-۳ همبستگی Correlation

کورلیشن عملیات روی دو سیگنال است که یکی از اهداف عملیاتی آن تعیین شباهت بین دو سیگنال است. فرض کنید سیگنال $x(n)$ (ارسال و بعد از مدتی سیگنال $y(n)$ همراه با نویز دریافت شود. برای تشخیص اینکه سیگنال دریافتی ناشی از انعکاسات سیگنال ارسالی

بوده است کورلیشن به کار گرفته می شود.

کورلیشن بین دو سیگنال $x(n)$ و $y(n)$ اینگونه تعریف می شود.

$$r_{xy}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-\ell)$$

به این رابطه همبستگی متقابل *cross correlation* می گویند به کورلیشن سیگنال $x(n)$ با خودش خود همبستگی *autocorrelation* می گویند.

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-\ell)$$

برای سیگنال پریودیک با پریود N این دو رابطه روی یک پریود تعریف می شود که خود نیز پریودیک است

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\tilde{y}(n-\ell)$$

و برای سیگنال توانی نیز اینگونه نوشته می شود.

$$r_{xy}(\ell) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)y(n-\ell)$$

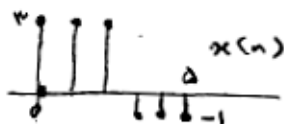
برای سهولت مقایسه این دو تابع را بصورت نرمال شده می نویسند.

$$\frac{\int_{x_2}(\ell) \cdot r_{xy}(\ell)}{r_{xy}(0)} \quad \frac{\int_{x_2}(\ell) \cdot r_{xy}(\ell)}{\sqrt{r_{xy}(0) r_{xy}(0)}}$$

مهمترین خاصیت کورلیشن: محاسبه کورلیشن رامی توان بوسیله کانولوشن انجام داد. $r_{xy}(l) = x(n) * y(-n)$ و می توان نشان داد که

$$\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} \geq |r_{xy}(\ell)|, r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\ell)$$

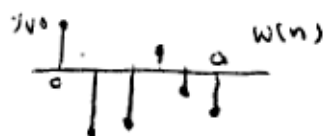
است نتیجه این خواهد بود. که $\rho_{xx}(l)$ و $\rho_{xy}(l)$ دارای ماکزیممی (اگر حالت تساوی برقرار نشود) برابر ۱ خواهند بود.



مثال: سیگنال $x(n)$ بعد از یک ثانیه همراه با مقداری نویز دریافت می شود. کورلیشن متقابل

و لا چه چیز را نشان می دهد.

جواب:



$$x(n) = \{3, 3, 3, -1, -1, -1\}, \quad w(n) = \{0.75, -1.4, -1.1, 0.4, -0.42, -0.7\}$$

$$y(n) = x(n-1) + w(n) \quad n=0, \dots$$

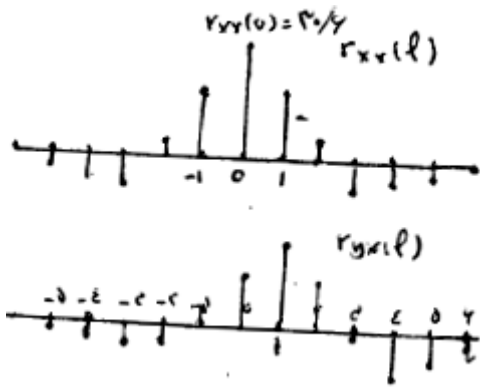
$$r_{xy}(\ell) = \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-\ell) = \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n-1) + w(n))X(n-l) =$$

$$\frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-1)(n-\ell) + \frac{1}{6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)x(n-\ell) = r_{xx}(\ell-1) + r_{wx}(\ell)$$

r_{wx} و r_{xx} هر یک طول $2N-1=11$ دارند ولی در حاصل جمع $r_{xx}(l-1)$ شرکت کرده است پس $r_{yx}(l)$ طول ۱۱ واحدی دارد مقادیر بدست آمده $r_{yx}(l)$ برابرند با

$$r_{yx}(l) = \{-0.75, -1.1, -1.4, -0.42, -0.7, -0.42, -1.1, -1.4, -0.75, -0.42, -0.7\}$$

دیده می شود که $r_{xx}(0)=30.6$ ماکزیمم می دهد همچنانکه انتظار می رفت $r_{xy}(l)$ ماکزیممی در $l=1$ می دهد. این به آن معنی است که سیگنالی مشابه $x(n)$ در $l=1$ دریافت شده است و این چیزی است که $y(n)=x(n-1)+w(n)$ از قبل آنرا داده بود.



محاسبه تابع همبستگی با استفاده از MATLAB

$$r_{xy} = \text{conv}(x, \text{fliplr}(y))$$

به سادگی می توان نشان داد که

$$(1) \quad Ex = r_{xx}(0) \text{ انرژی سیگنال}$$

$$(2) \quad Px = r_{xx}(0) \text{ توان سیگنال پریودیک}$$

(3) برای سیگنال های حقیقی $r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$ است بنابراین برای محاسبه

تابع همبستگی فقط/های منفی کفایت می کند

(4) اگر طول دو سیگنال محدود و L و M باشند مانند کانولوشن طول کورلیشن $L+M-1$ است

(5) همبستگی سیگنال پریودیک: تابع همبستگی سیگنال پریودیک خود پریودیک است. از این خاصیت می توان برای تعیین پریود

سیگنال های پریودیک آلوده به نویز استفاده کرد در این حال پریود سیگنال فاصله بین دو ماکزیمم متوالی در تابع همبستگی است.

(6) اگر سیگنال $x(n)$ از سیستمی با تابع ضربه $h(n)$ عبور کند خروجی $y(n)$ بدست می آید. بین توابع همبستگی آنها روابط ذیل برقرار است.

$$r_{yx}(l) = y(l) \otimes x(-l) = h(l) \otimes r_{xx}(l), \quad r_{yy}(l) = y(l) \otimes y(-l) = r_{hh}(l) \otimes r_{xx}(l)$$

(7) $r_{xx}(0)$ انرژی سیگنال را نشان می داد میتوان ثابت کرد که اگر سیگنال ایستا و غیر پریودیک باشد $r_{xx}(\infty)$ برابر میانگین سیگنال می گردد.

$$Ex = r_{xx}(0), \quad |m_x|^2 = r_{xx}(\infty)$$

(8) کوواریانس: مشابه تابع همبستگی تابع دیگری به نام کواریانس مورد استفاده قرار می گیرد. کوواریانس خودی و متقابل اینگونه تعریف می گردد.

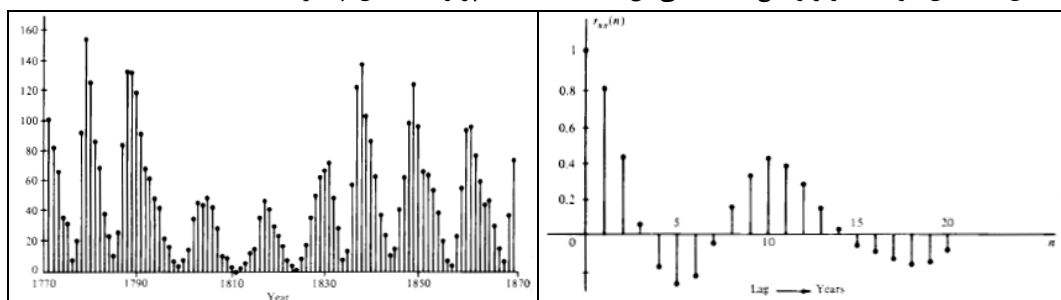
$$C_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) - m_x)(y(n-l) - m_y)$$

$$C_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x(n) - m_x)(x(n-l) - m_x)$$

همچنانکه از رابطه می توان نتیجه گرفت $\sigma_x^2 = C_{xx}(0)$ واریانس سیگنال $x(n)$ می باشد و یا می توان نوشت:

$$r_{xx}(0) = C_{xx}(0) + |m_x|^2$$

مثال: سیگنال آلوده به نویز و تابع همبستگی آن داده شده است، پریود سیگنال چقدر است؟



جواب: اگر پریود از سیگنال دریافت شده اندازه گیری شود در هر قسمت مقداری بدست می آید. که با یکدیگر برابر نیستند. این کار را روی شکل سیگنال دریافتی انجام دهید. ولی از تابع همبستگی تخمین بهتر (واریانس کمتر) از پریود بدست می آید که عدد ۱۰ به راحتی در آن قابل اندازه گیری است.

مثال: همبستگی خودی تابع $x(n)=a^n u(n)$ $0 < a < 1$ و همبستگی خودی نرمال شده آنرا بدست آورید.

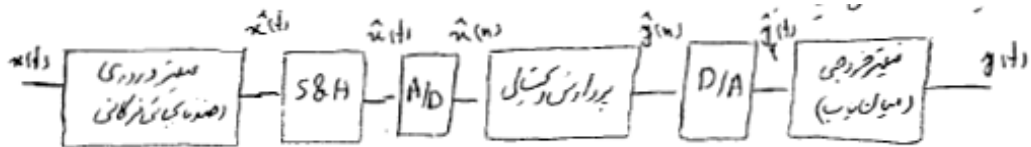
$$\begin{aligned}
 r_{xx}(l) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-l) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-l) \Rightarrow \\
 \text{for } l > 0 \Rightarrow r_{xx}(l) &= \sum_{n=l}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=l}^{\infty} (a^2)^n = \frac{(a^2)^l - (a^2)^{\infty+1}}{1-a^2} \times a^{-l} = \frac{a^l}{1-a^2} \\
 \text{for } l < 0 \Rightarrow r_{xx}(l) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n a^{n-l} = a^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{a^{-l}}{1-a^2} \\
 \Rightarrow \text{for } l < 0 \Rightarrow r_{xx}(l) &= \frac{1}{1-a^2} a^{|l|} \\
 E_x = r_{xx}(0) &= \frac{1}{1-a^2} \quad \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} = a^{|l|} \quad -\infty < l < \infty
 \end{aligned}$$

۴-۳ تبدیل سیگنال آنالوگ به گسسته و بر عکس

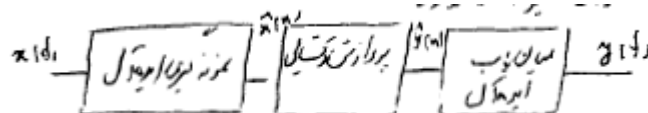
۱-۴-۳ منشا سیگنال گسسته

منشا سیگنال گسسته ممکن است سیستمهای گسسته و یا نمونه گیری از سیگنال های پیوسته باشد. اکثر سیگنال هایی که برای پردازش مورد علاقه هستند سیگنال هایی پیوسته هستند مانند سیگنال زلزله، صوت، موسیقی، ویدئویی، سونار، رادار، بیو لوژیکی و غیره. بعضی از سیگنال ها مانند سری های زمانی که مسائل اقتصادی و اجتماعی را مورد تحلیل قرار می دهد به لحاظ ماهیت اطلاعاتی آماری هستند که خود گسسته می باشند.

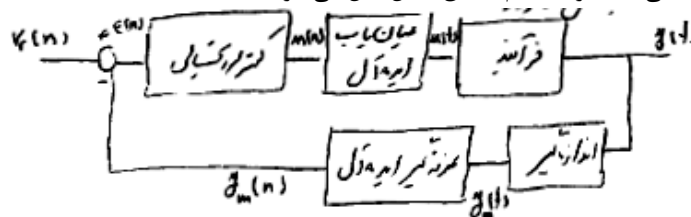
انجام پردازش دیجیتالی روی سیگنال پیوسته مستلزم دیجیتالی کردن سیگنال سپس انجام پردازش و در نهایت تبدیل خروجی به سیگنال پیوسته است که در دنیای واقعی مورد نیاز است. شکل زیر این ساختار را نشان می دهد.



این ساختار را از نظر عملکرد می توان اینگونه خلاصه کرد.



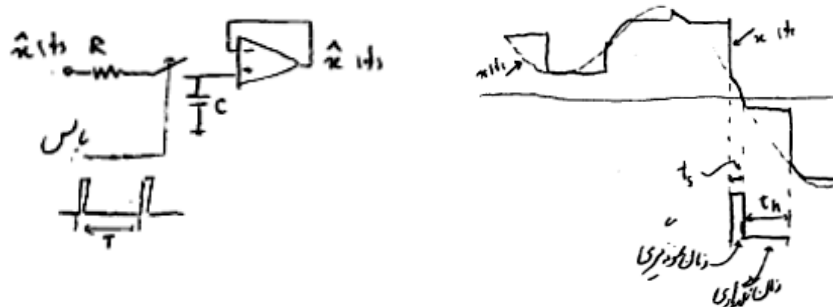
اما در یک سیستم کنترل دیجیتالی ساختار سیستم مطابق شکل ذیل می گردد.



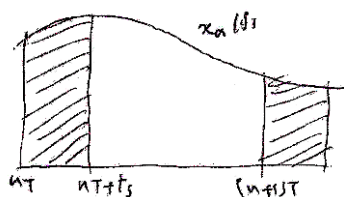
۲-۴-۳ مدار S&H

شکل، مدار ساده شده **Sample&Hold** (نمونه گیری و نگهداری) را نشان می دهد پالس ساعت با پریود T به سوئیچ الکتریکی اعمال می گردد وقتی پالس در حالت ۱ است سوئیچ بسته شده و خازن توسط ورودی شارژ می شود. وقتی پالس در حالت ۰ است سوئیچ باز شده و از آنجا که خازن راهی برای تخلیه ندارد ولتاژ را در خود ثابت نگه می دارد وجود یافر برای این است که خازن در مدت نگهداری دشارژ نشود. به پریود T پریود نمونه گیری و به $F=1/T$ فرکانس نمونه گیری می گویند.

انتظاری که از این مدار می رود آن است که قرار است در زمانهای $nT+ts$ خروجی S&H برابر باشد با $x_d(nT+ts)=x_a(nT+ts)$ باشد



(در زمان نمونه گیری ورودی را دنبال کند) ولی به دلیل مقاومت خروجی مداری که $x(n)$ را تامین می کند و مدت زمان ts عملاً از



سیگنال ورودی در مدت زمان نمونه گیری انتگرال گرفته می شود، یعنی بجای $x_a(nT+ts)$

$$\frac{1}{t_s} \int_{nT}^{nT+t_s} x_a(t) dt$$

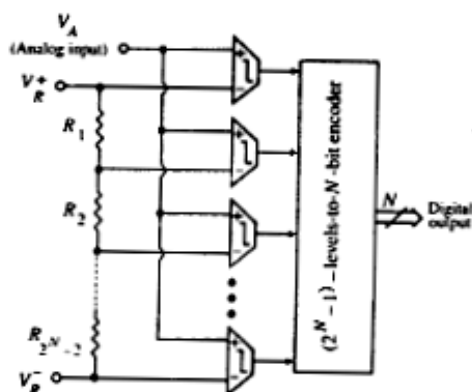
مقدار را خواهیم داشت که عامل خطا است برای رفع این خطا زمان t_s

نسبت به T باید حتی الامکان کوچک باشد در ضمن مقاومت مداری که خازن را شارژ می کند (R) کوچک باشد.

۳-۴-۳ مبدل آنالوگ به دیجیتال (ADC) Analog to Digital Converter

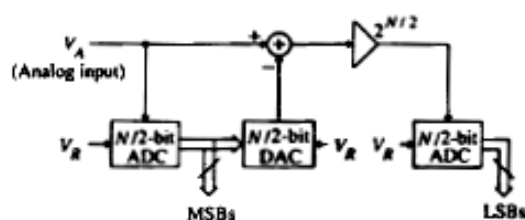
این مبدل ها کار خود را در هر پریود و از زمان t_s شروع کرده و سیگنال نمونه گیری شده گسسته را به سیگنال دیجیتالی تبدیل می کند. ADC دو مشخصه مهم دارند یکی تعداد بیتها که رزولوشن آنها را تعیین میکند و دیگری زمان تبدیل ($conversion\ time$) است. زمان تبدیل ADC باید کمتر از t_h باشد تا بتواند مدار درست کار کند. علاوه بر این بعضی از ADC ها خروجی سریال بجای موازی تولید می کند. ADC ها براساس زمان تبدیل غالبا طبقه بندی می شوند و هر چه سریعتر باشد قیمت بالاتری دارد و عموما مصرف انرژی بالاتری نیز دارد. انواع ADC ها از این قرارند.

۱) مبدل ADC از نوع فلش Flash



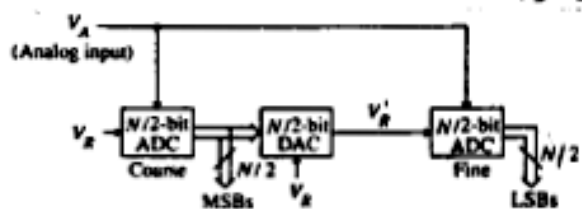
شکل ساختمان مبدل فلش را نشان می دهد برای داشتن N بیت خروجی به $2^N - 1$ مقایسه کننده نیاز است که $2^N - 1$ خروجی صفر یا یک تولید می کند. این خروجی به انکودری اعمال می شود تا N بیت خروجی تولید گردد. این مبدل بسیار سریع است ولی سخت افزار بزرگی دارد لذا برای رزولوشن های کمتر از ۸ بیت استفاده می شود.

۲) مبدل سری - موازی



به منظور استفاده از سرعت مبدلهای فلش و نیز کاهش سخت افزار مدار از ۲ تا $N/2$ مبدل فلش استفاده می گردد. به این ترتیب در مقابل افزایش اندکی در زمان تبدیل، کاهش قابل توجهی در سخت افزار پدید می آید.

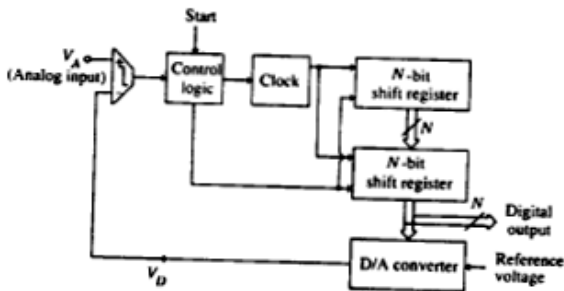
در روش اول سیگنال به یکی از $N/2$ بیت مبدلها اعمال می شود تا MSB ها بدست آیند خروجی علاوه بر این به $N/2$ بیت DAC اعمال و سیگنال خروجی از ورودی کم شده و بعد از تقویت با بهره $2^{N/2}$ به دومین ADC اعمال تا LSB بدست آیند.



در روش دوم ابتدا سیگنال به یکی از ADC ها اعمال تا MSB ها بدست آیند سپس MSB ها به DAC اعمال می گردد و خروجی آن بعنوان ولتاژ مرجع برای دومین ADC استفاده می شود. با تعمیم طرح های فوق می توان برای داشتن N بیت مبدل آنالوگ به دیجیتالی از N مبدل ۱ بیتی طبق توضیحات فوق استفاده کرد که به آن $Pipelined$ ADC می گویند.

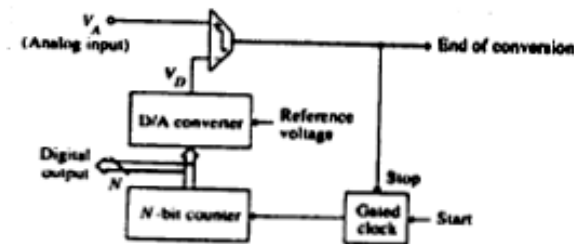
۳) مبدل تقریب متوالی

این روش براساس سعی و خطا عمل می کنند به این ترتیب که خروجی تولیدی به DAC اعمال می گردد و با ورودی مقایسه می شود اگر خروجی کمتر از ورودی باشد در اولین پالس ورودی ۱ وارد شیفتر رجیسترها می گردد و اگر خروجی بزرگتر از ورودی باشد بیت صفر وارد



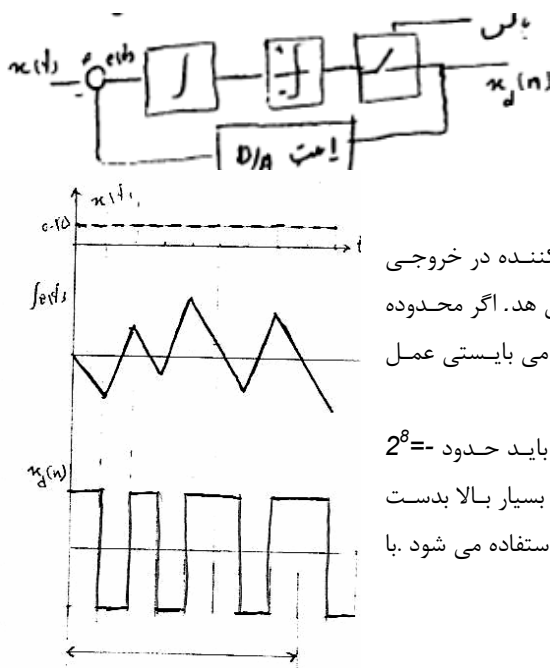
آن می شود. این عمل تا برابر شدن ورودی و خروجی ارائه می یابد این نوع مبدل برای رزولوشن های بالا با قیمت مناسب ساخته شده است و برای اکثر کارهای پردازش سیگنال مناسب است.

۴) مبدل شمارشی Counting ADC



در این مبدل شمارنده ای شروع به شمارش می کند و به محض اینکه ورودی و خروجی برابر گردند شمارش متوقف می شود. مدت زمان تبدیل این ADC برابر $T(2^N - 1)$ است که T پریود پالس ساعت است. به دلیل بزرگ بودن زمان تبدیل، برای رزولوشن های بالا فقط در کاربردهای سرعت پائین کاربرد دارد.

۵) مبدل فرا نمونه گیر سیگما یا ولتا:



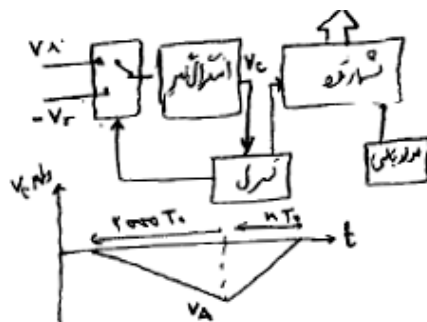
در این مبدل سرعت نمونه برداری بسیار بالاتر از حد نیاز در نظر گرفته می شود و مدار مطابق شکل مقابل است.

فرض کنید سیگنال $x(t)$ محدود به دو سطح $\pm V$ باشد. سیگنال وارد انتگرال گیر و سپس به مقایسه کننده ای اعمال میگردد و خروجی مقایسه کننده مقادیر $\pm V$ را می تواند به خود بگیرد. در پالس های

مشخص که پریود آن بسیار بالاتر از حد مورد نیاز است خروجی مقایسه کننده در خروجی ظاهر می گردد. شکل T نحوه کار مدار را وقتی $x(t) = 0.25$ باشد نشان می دهد. اگر محدوده تغییرات $x(t)$ با محدوده تغییرات مقایسه کننده متفاوت باشد، در فیدبک می بایستی عمل تطبیق صورت گیرد (با DAC یک بیتی).

این مبدل اگر قرار باشد رزولوشن ۸ بیتی داشته باشیم پریود نمونه گیری باید حدود $2^8 = 256$ برابر پریود حداقل نمونه گیری باشد. از آنجا که فرکانس نمونه گیری بسیار بالا بدست می آید این مبدل برای سیگنال های فرکانس پائین و صوتی و مشابه آن استفاده می شود. با اعمال فیلتر LP بر $x_d(n)$ سیگنال $x(t)$ بازسازی می گردد.

۶) مبدل شیب دوگانه Dual Slope



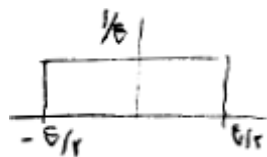
این مبدل به دلیل سرعت پایین برای کاربردهای کند مثل نمایشگر های دیجیتالی استفاده می شود. شکل نحوه عمل آنرا نشان می دهد. در مدت زمان $2000T$ (در $31/2$ رقمی) ورودی به انتگرال گیری اعمال می شود که خازنی را شارژ می کند. سپس انتگرال گیر به ولتاژ مرجع وصل می شود تا خازن دشارژ گردد. شمارنده مدت دشارژ n را اندازه گیری می کند. خروجی شمارنده متناسب با نسبت سیگنال ورودی به ولتاژ مرجع است.

$$2000TV_i = nTV_r \Rightarrow n = 2000V_i/V_r$$

اگر ولتاژ مرجع درست انتخاب گردد n متناسب با مقدار سیگنال ورودی است.

عوامل خطا در مبدل های ADC :

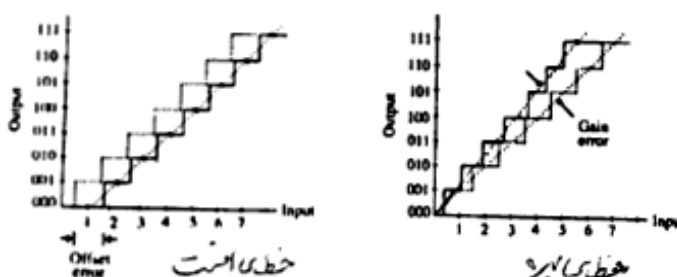
۴ نوع عامل خطا در مبدل های ADC وجود دارند که عبارتند از :



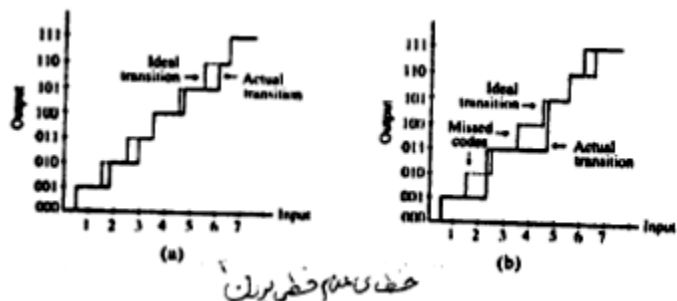
۱. **خطای کوانتیزه شدن**: این خطا تفاوت در مقدار هایی سیگنال ورودی آنالوگ و خروجی دیجیتالی است مقدار این خطا $e(n) \leq \delta/2$ است که δ ارزش LSB باشد. برای تحلیل اثر این خطا در رفتار سیستم آن را بصورت نویز یکنواخت، تابع چگالی مطابق شکل در نظر می گیرند و به ورودی کوانتیزه اضافه می نمایند.

۲. **خطای offset**: ADC های واقعی از این خطا متأثر هستند که بدلیل وجود المانهای فعال در ساختار ADC است. این خطا باعث می شود که ورودی ADC بصورت $x(t) \pm V_{offset}$ ظاهر شود. این خطا تابع درجه حرارت محیط نیز می باشد.

۳. **خطای بهره**: از ADC انتظار می رود که بهره واحد داشته باشد ولی در عمل ممکن است با بهره دیگری مواجه شویم که خطا در خروجی را تولید کند به این معنی که به جای $V_q = V_i \pm \delta/2$ با $V_q = k V_i \pm \delta/2$ مواجه شدیم.

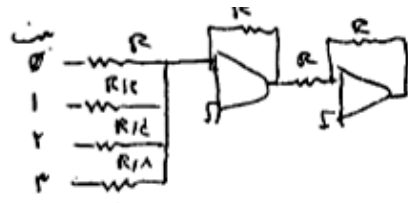


۴. **خطای عدم خطی بودن**: این خطا به آن معنی است که δ (ارزش LSB) در تمام محدوده ورودی ثابت نیست به این ترتیب بین خروجی ایده آل و خروجی واقعی اختلاف ایجاد گردد. شکل این تفاوت ها را نشان می دهد. این اختلاف در بعضی از نقاط ممکن است به حدی برسد که بعضی از کدها هرگز در خروجی ظاهر نگردند.

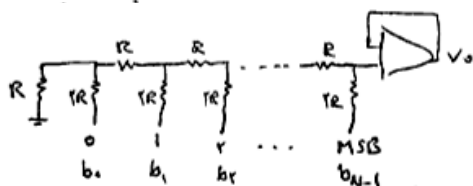


۴-۴-۳ مبدل دیجیتال به آنالوگ (Digital to Analog Converter (DAC

DAC سیگنال دیجیتال را به سیگنال کوانتیزه تبدیل می کند سیگنالی که از نظر زمانی پیوسته ولی دامنه آن گسسته است (پله ای) با عبور دادن سیگنال کوانتیزه از فیلتر LP مناسب خروجی هموار بدست می آید. DAC ها انواع و اقسامی دارند که در ذیل شرح می شوند.



۱. **DAC با مقاومت های وزنی**: شکل ساختار مداری این DAC را نشان می دهد. در این طرح وقتی تعداد بیت های ورودی N ، زیاد باشد تنوع گسترده مقاومت های مورد نیاز پدید می آید که طرح را نا مطلوب می سازد. از این طرح در طراحی IC ها استفاده می گردد.

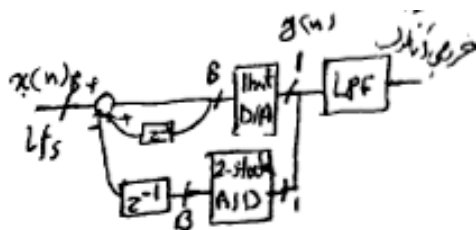


۲. **DAC با نردبان مقاومتی**: در این طرح نوع مقاومت ها به R و $2R$ محدود می گردند، مستقل از اینکه N چه عددی باشد. خروجی این DAC برابر است با

$$V_o = (b_0 2^{-N} + b_1 2^{-N+1} + \dots + b_{N-1} 2^{-1}) V_h$$

که V_h ولتاژ مربوطه به حالت دیجیتالی ۱ است.

۳. DAC فرا نمونه گیر سیگمادلتا: Oversampling Sigma Delta



در این مبدل ابتدا فرکانس نمونه گیری سیگنال $x(n)$ افزایش قابل ملاحظه یافته و سپس به DAC از نوع سیگمادلتا اعمال می گردد. خروجی به ۱ بیت DAC اعمال و سپس با فیلتر کردن آن سیگنال آنالوگ معادل سیگنال دیجیتالی در خروجی ظاهر می گردد. در این روش سیگنال $x(n)$ به مراتب فرکانس نمونه گیری بالاتر از مقدار مورد نیاز دارد (نایکوئیست ریت). سیگنال $y(n)$ سیگنالی دو حالته است که بین ماکزیم و می نیمم سیگنال $x(n)$ سوئیچ می شود بلوک ADC مقدار $y(n)$ را به سیگنال B بیت دیجیتالی معادل تبدیل می کند تا بتواند با $x(n)$ که B بیت دارد مقایسه شود.

مشخصات DAC ها

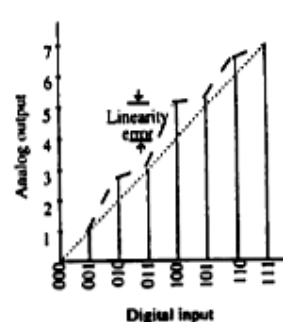
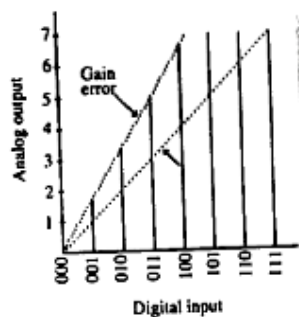
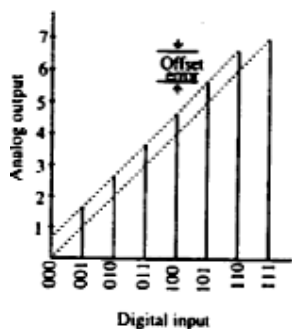
۱- تعداد بیتها معرف رزولوشن است.

۲- در DAC بدلیل وجود المانهای فعال خطای *offset* وجود دارند.

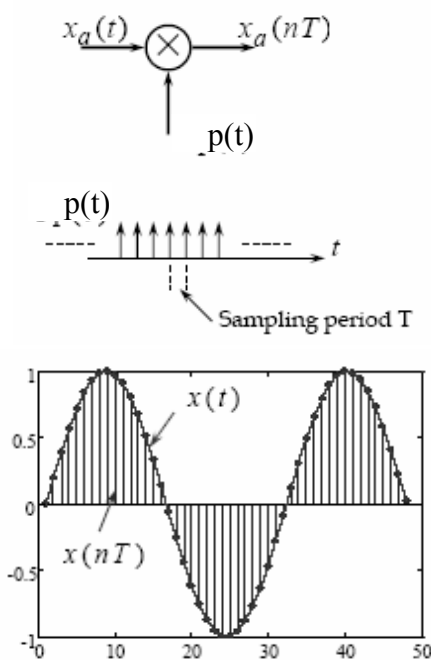
۳- خطای بهره: اگر بهره المان در عمل غیر از ۱ باشد.

۴- خطای عدم خطی بودن: به این معنی است که خروجی به ازای تغییر ۱ بیت در محدوده کار مقادیر تغییرات متفاوت دارد. است.

۵- زمان تبدیل *Convesion Time*: مدت زمان بین اعمال سیگنال و آماده بودن خروجی معتبر



۵-۳ تئوری نمونه برداری



نمونه برداری از سیگنال را $S\&H$ انجام می دهد اگر پریود سوئیچ را T در نظر بگیریم و نمونه برداری با پالس باریک δ صورت گیرد آنوقت سیگنال خروجی برابر خواهد شد با

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

در این رابطه $x_a(t)$ سیگنال آنالوگ ورودی است که مقدار آن در زمان نمونه برداری $x_a(nT)$ است. $p(t)$ مجموعه تابع ضربه است که کار نمونه برداری را انجام می دهد.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nTs)$$

همچنانکه دیده می شود سیگنال $x_p(t)$ سیگنال گسسته ای است که از مجموعه تابع ضربه با دامنه هایی که $x_a(nT)$ تعیین می کند تشکیل شده است.

تبدیل فوری سیگنال $x_a(t)$ برابر است با

$$x_a(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt$$

سیگنال نمونه برداری $p(t)$ سیگنالی پریودیک است که سری فوری آن برابر است با

$$c_n = \frac{1}{Ts} \int_0^T \delta(t)e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{Ts} \Rightarrow p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\Omega_s t} = \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_s t}$$

از طرفی داریم

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) = x_a(t) \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_s t}$$

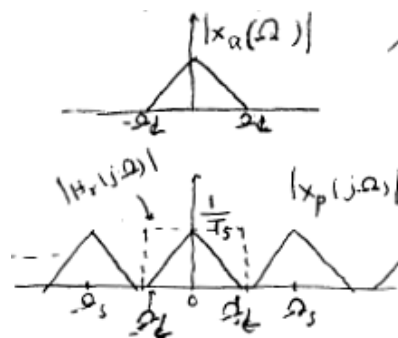
حال فوری $x_p(t)$ برابر است با

$$X_p(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{Ts} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\Omega_s t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{Ts} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega - n\Omega_s)t} dt$$

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j(\Omega - n\Omega_s)t} dt = \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s)$$

به این ترتیب فوری سیگنال $x_p(t)$ همان فوری سیگنال $x_a(t)$ است که در $1/Ts$ ضرب شده ورودی محور فرکانس با پریود Ω_s پریودیک شده است.

همپوشانی فرکانسی aliasing



اگر Ω_s کمتر از دو برابر Ω باشد فوری $X_p(\Omega)$ شکل دیگری به خود می گیرد در این حالت طیف فرکانس $X_a(\Omega)$ که بصورت پریودیک در $X_p(\Omega)$ تکرار می شود لبه های آنها روی هم افتاده و همپوشانی فرکانسی $aliasing$ یا $folding$ اتفاق می افتد.

در حالت اول که $\Omega_s > 2\Omega$ بود با استفاده از فیلتر پائین گذر $H(\Omega)$ می توانستیم سیگنال $x_a(t)$ را بازسازی کنیم ولی وقتی $\Omega_s < 2\Omega$ است خروجی فیلتر پائین گذر طیفی است که با طیف $X_a(\Omega)$ تفاوت دارد. در این حال سیگنال $x_a(t)$ از سیگنال نمونه برداری شده قابل بازسازی نیست.

به فرکانس Ω که حد بالای فرکانسی سیگنال آنالوگ است، فرکانس نایکوئیست گفته می شود $\Omega_n = \Omega/2$. به عدد ۲، عدد نایکوئیست می

گویند. برای جلوگیری از همپوشانی فرکانسی، فرکانس نمونه برداری باید حداقل حاصلضرب عدد نایکوئیست در فرکانس نایکوئیست باشد $\Omega_s > 2\Omega_n$. $\Omega_s = 2\Omega_n$ نایکوئیست rate نام دارد. اگر $\Omega_s > 2\Omega_n$ باشد به آن فرا نمونه برداری و اگر $\Omega_s < 2\Omega_n$ باشد به آن فرو نمونه برداری می گویند.

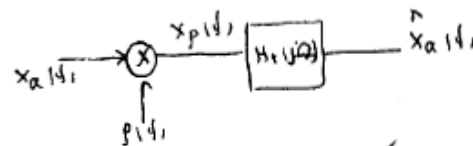
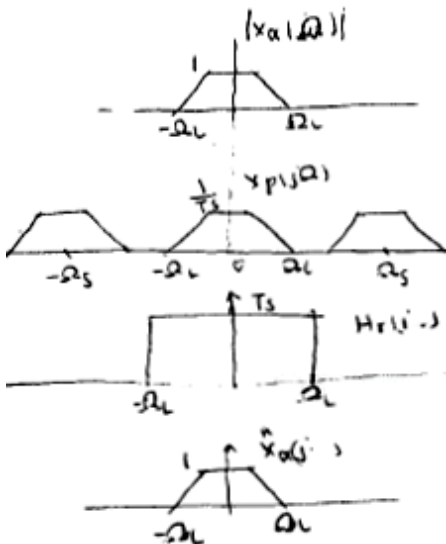
۳-۵-۱ فیلتر ورودی و انتخاب پریود نمونه برداری:

برای انتخاب پریود نمونه برداری باید اطلاعات اولیه در رابطه با طیف سیگنال را داشت و سپس بر اساس آن و فرکانس نمونه برداری نایکوئیست اقدام کرد. در سیگنال های تلفنی صوتی حد فرکانس ۴KHZ است که فرکانس نمونه برداری حدود ۸KHZ انتخاب می شود. حد فرکانس سیگنال ویدئویی ۵MHZ است و در همین رابطه نیز فرکانس نمونه برداری باید انتخاب شود. سیگنال های موسیقی با کیفیت بالا حد فرکانس ۲۰KHZ دارند لذا فرکانس نمونه برداری ۴۲KHZ انتخاب می شود.

برای جلوگیری از وقوع همپوشانی فرکانسی که بازسازی سیگنال نمونه برداری شده را با مشکل مواجه می کند، در ورودی سیستم نمونه بردار و قبل از S&H فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی که فرکانس قطع آن Ω_c به گونه ای انتخاب می شود که $\Omega_c < \Omega_s/2$ باشد تعبیه می گردد. به این ترتیب اگر سیگنال، مولفه های ناخواسته ای داشته باشد که منجر به همپوشانی فرکانسی شود در ورودی حذف می گردد.

۳-۵-۲ بازسازی سیگنال:

برای بازسازی سیگنال اگر سیگنال گسسته $x_p(t)$ را از فیلتر پائین گذر $H(\Omega)$ عبور دهیم سیگنال بازسازی شده بدست می آید که مشخصه فرکانسی $x_a(t)$ را دارد و در شکل نشان داده شده است.



از $H_r(\Omega)$ عکس تبدیل فوری می گرفته می شود.

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega =$$

$$\frac{T_s}{2\pi} \int_{-\omega_L}^{\omega_L} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\text{Sin}(\Omega_L t)}{2\pi/T_s \cdot t/2} \quad (-\infty \leq t \leq \infty)$$

از طرفی

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t - nT_s)$$

برای بدست آوردن $\hat{x}_a(t)$ دو سیگنال $x_p(t)$ و $h_r(t)$ باید کانوالو شوند.

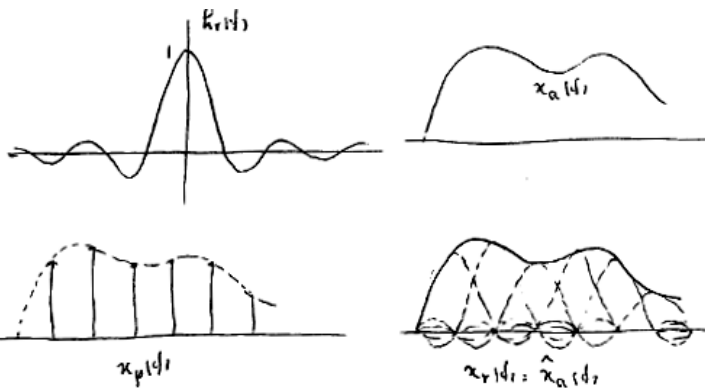
$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(\tau - nT_s) h_r(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s) h_r(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) h_r(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\text{Sin}[\omega_L(t - nT_s)]}{\frac{\pi}{T_s} \left(\frac{t - nT_s}{T_s} \right)} \end{aligned}$$

فرض کنیم $\Omega_s = 2\Omega_L$ باشد آنگاه

$$\hat{y}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\text{Sin}\left[\frac{1}{2} \frac{2\pi}{T_s} (t - nT_s)\right]}{2\pi/T_s \cdot \frac{(t - nT_s)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi(t - nT_s)}{T_s}\right]}{\pi(t - nT_s)/T_s}$$

اگر به گونه دیگر به بازسازی $xa(t)$ نگاه کنیم $hr(t)$

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nTs)}{Ts}\right]}{\frac{n(t-nTs)}{Ts}}$$



میان یابی است که با میان یابی ایده آل، سیگنال $xa(t)$ را از $xp(t)$ که نمونه برداری $xa(t)$ است بازسازی می کنند.

دقت کنید فیلتر پائین گذر ایده آل $Hr(\Omega)$ و فیلتر ورودی ضد همپوشانی فرکانسی ایده آل فیلترهای ناپایدار و غیر علی هستند و تابع تبدیل کسری ندارند،

لذا قابل پیاده سازی نیستند. از این رو در عمل بجای فیلتر پائین گذر ایده آل از فیلتر پائین گذر پایدار قابل ساخت استفاده می گردد که مشکلات مربوط به خود را به همراه دارد.

نمونه برداری از سیگنال میان گذر

در سیگنال میان گذر فرکانس نمونه برداری براساس دو برابر پهنای باند سیگنال و نه دو برابر فرکانس حد صورت می گیرد.

$$\Omega_s = 2B = \frac{2\Omega_h}{M}, \quad M \text{ integer}$$

مستقل از اینکه فرکانس نمونه برداری چه مقدار باشد می توان نوشت

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - n\Omega_s)$$

$$X_p(\Omega) = \frac{1}{Ts} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(\Omega - 2nB)$$

شکل چگونگی طیف سیگنال ها و بازسازی مربوطه را نشان می دهد اگر M عدد صحیح بدست آید پهنای باند را

$$B' = \frac{\Omega_h}{\text{integer}\left(\frac{\Omega_h}{B}\right)}$$

و $\Omega_s = 2B'$ در نظر گرفته می شود. اگر سیگنال از فیلتر میان گذر عبور داده شود. سیگنال اولیه بازسازی می شود. اگر از فیلتر پائین گذر استفاده شود مشابه سیگنال در باند پایه بدست می آید.

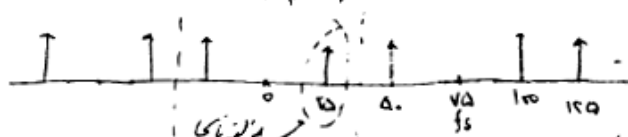
مثال: از سیگنال $xa(t) = 3\cos(100\pi t)$ در ۳ فرکانس ۲۰۰، ۱۰۰، ۷۵ هرتز نمونه گیری شده است امکان بازسازی سیگنال را بررسی کنید.

جواب:

$$f_s = 75 \text{ Hz} \Rightarrow x(n) = 3\cos(100\pi \cdot n \cdot T_s) = 3\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\pi} = \frac{f_s \cdot \pi}{\pi n} = \frac{1}{n} \Rightarrow N = 3$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3T_s} = 25 \text{ Hz}$$



سیگنال نمونه گیری شده مولفه نابجای ۲۵ هرتزی به جای مولفه ۵۰ هرتزی اصلی پیدا می کنند.

۲/

$$f_s = 100 \text{ Hz} \Rightarrow x(n) = 2 \cos(100\pi n T_s) = 2 \cos(n\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{W}{T_s} = \frac{\pi}{T_s} = \frac{1}{T_s} \Rightarrow N = 2$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T_s} = 50 \text{ Hz}$$

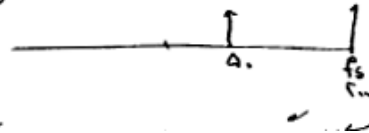


سیگنال نمونه گیری شده دارای مولفه ۵۰ هرتزی مشابه سیگنال آنالوگ ولی با دامنه ۲ برابر است.

$$c) f_s = 200 \text{ Hz} \Rightarrow x(n) = 2 \cos(200\pi n T_s) = 2 \cos(n\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{W}{T_s} = \frac{\pi}{T_s} = \frac{1}{T_s} \Rightarrow N = 2$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T_s} = 50 \text{ Hz}$$



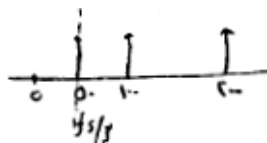
سیگنال نمونه گیری شده دارای مولفه ۵۰ هرتزی مشابه سیگنال آنالوگ است که قابل بازسازی است.

مثال: فرکانس نایکوئیست و نایکوئیست ریت سیگنال $x(n) = 3\cos 50\pi n + 10\cos 300\pi n$ را تعیین کند.

برای سیگنال اول $F_1 = 25 \text{ Hz}$ و برای سیگنال دوم $F_2 = 150 \text{ Hz}$ است پس $F_n = 150 \text{ Hz}$ است و نایکوئیست ریت برابر $2F_n = 300 \text{ Hz}$ و فرکانس نمونه گیری $F_s > 2F_n = 300 \text{ Hz}$ باید باشد.

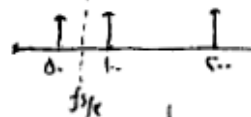
مثال: اگر از سیگنال $x(t) = \cos 400\pi t + \cos 100\pi t + \cos 200\pi t$ با فرکانس های ۱۰۰، ۳۲۵، ۱۵۰، ۴۰۰ و ۶۰۰ هرتز نمونه گیری شود. چه مولفه های فرکانسی قابل بازسازی هستند. آیا این مولفه ها همان مولفه های سیگنال اصلی هستند.

$$f_s = 100$$



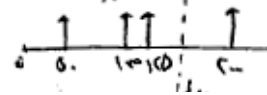
(۱) هیچ مولفه ای قابل محاسبه نیست.

$$f_s = 150$$



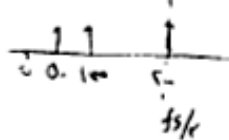
(۲) فقط مولفه های ۵۰ هرتزی با ۳ برابر توان قابل بازسازی است.

$$f_s = 225$$



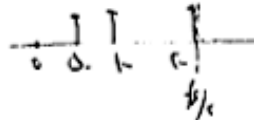
(۳) مولفه ۵۰، ۱۰۰ و ۱۲۵ از بازسازی بدست می آیند که با مولفه های سیگنال اصلی متفاوت هستند.

$$f_s = 400 \text{ Hz}$$



(۴) تنها مولفه های ۵۰ و صد هرتزی قابل محاسبه هستند و سیگنال اصلی را نمی توان بازیافت.

$$f_s = 401 \text{ Hz}$$



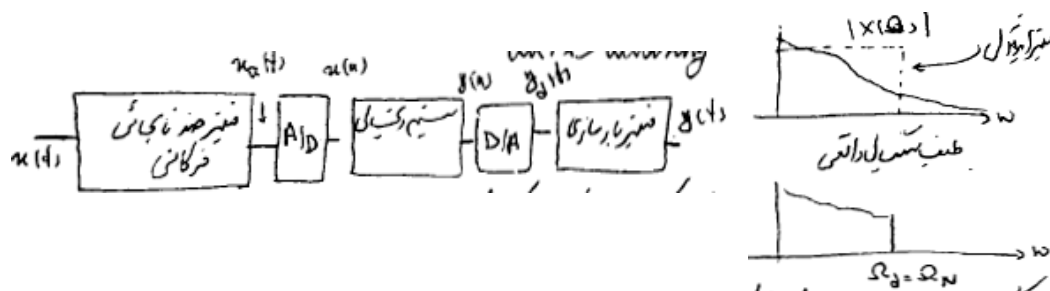
(۵) سیگنال اصلی با مولفه های ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ هرتزی را می توان با فیلتر پائین گذر ایده آل بازسازی نمود این فرکانس نمونه گیری برابر است با $F_s = 2F_n + \epsilon = 400 + \epsilon$

۳-۶ بررسی عملکرد عوامل نمونه گیری و بازیابی سیگنال

۳-۶-۱ فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی anti-aliasing filter

عملا پهنای باند سیگنال بصورت برشی محدود نیست که بتوان فرکانس نایکوئیست را برای جلوگیری از نا بجائی فرکانس مشخص کرد راه حلی که به نظر می رسد در مرحله اول ممکن است استفاده از فیلتر پائین گذر ایده آل باشد که طیف سیگنال در فرکانس دلخواه Ω_d را به صورت برشی محدود کند تا فرکانس نایکوئیست $\Omega_n = \Omega_d$ بدست آید.

فیلتر ایده آل، قابل ساخت نیست لذا باید با فیلتری قابل ساخت جایگزین گردد. این جایگزینی به همراه خود تبعاتی را به دنبال دارد. یک فیلتر واقعی را با R_p (ریپل باند گذر)، R_s (تضعیف باند حذف) Ω_p لبه باند گذر و Ω_s لبه باند حذف می توان معرفی کرد. تبعات استفاده



از فیلتر واقعی که به صورت خطا در عملکرد سیستم ظاهر می شوند از این قرار هستند:

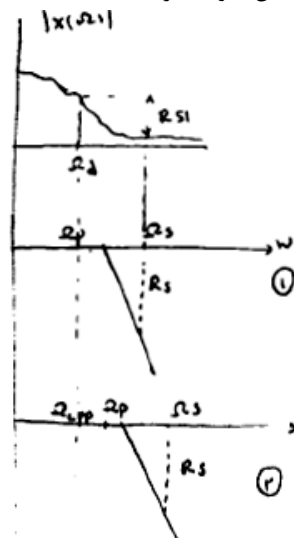
۱. بهره باند گذر به مقدار ثابت یک نسبت و برای فرکانس های مختلف تا حد مقدار R_p می تواند متغیر باشد.
۲. فرکانس های باند حذف به کلی از بین نمی روند بنابراین اثر ضد همپوشانی فرکانسی به طور کلی از بین رفتنی نیست ولی آن را می توان به مقدار کافی تضعیف کرد.
۳. فیلترهای واقعی مانند فیلتر ایده آل صفر فاز $zero\ phase$ نیستند، نوع خطی فاز آنها تاخیری به سیگنال تحمیل میکند و نوع با فاز غیر خطی، فاز سیگنال ورودی را معوج می نماید. محدود تقریبی خطی فاز فیلترهای شناخته شده از این قرار است.

بسل	الپتیک	باترورث-چی چف	باترورث درجه ۲	باترورث درجه ۱
Ω_p	$0.5\Omega_p$	$0.75\Omega_p$	$0.85\Omega_p$	Ω_p

۴. کاهش مقدار R_p و افزایش R_s به منظور کاهش خطا ناشی از فیلتر واقعی منجر به افزایش درجه فیلتر آنالوگ می گردد که پیچیدگی طرح را افزایش می دهد.

فیلتر باترورث برای این منظور فیلتر مناسبی است ولی اگر از الپتیک یا چی چف شف ۲ که دارای صفر هستند استفاده شود باید مراقب بود که دارای صفری در بینهایت نباشد (درجه صورت بیشتر از مخرج باشد). در غیر اینصورت دامنه فیلتر در فرکانسهای بالا ثابت و افت شیبی نداشته و نویز فرکانس بالا می تواند مشکل ایجاد کند.

در کاربردهای مخابراتی از فیلتر الپتیک $\Omega_p = 3.6\text{KHz}$ و $\Omega_s = 4\text{KHz}$ با درجه ۳ استفاده می شود و فرکانس نمونه گیری 8KHz است.



۵. براساس مباحث فوق و ضرورت یا عدم ضرورت خطی بودن فاز فیلتر، مطابق شکل های مقابل می توان اقدام به طرح فیلتر کرد. در فیلتر نمودار ۱ لبه باند گذر $\Omega_p = \Omega_d$ قرار گرفته است و در Ω_s تضعیف R_s به سیگنال اعمال می شود. در این طراحی فاز سیگنال در معرض اعوجاج قرار دارد که بستگی به نوع فیلتر مقدار آن متفاوت خواهد بود.

در نمودار ۲ مقدار Ω_d برابر Ω_{pp} (محدوده فرکانسی که فاز فیلتر خطی است) قرار گرفته است به این ترتیب سیگنالهای باند گذر بدون اعوجاج فاز و فقط با یک تاخیر در خروجی فیلتر ظاهر می شوند.

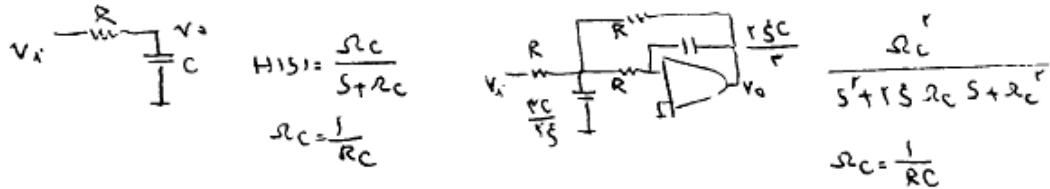
- ۶- فرکانس نمونه گیری: حداقل ممکن فرکانس نمونه گیری در حالت ایده آل $\Omega_s = 2\Omega_d$ است که آن را به عنوان معیار می توان در نظر گرفت. اما از آنجا که باید فیلتر واقعی استفاده کرد و آن هم دارای باند انتقالی $(\Omega_p - \Omega_{stop})$ است، فرکانس نمونه برداری به $\Omega_s = 2\Omega_{stop}$ افزایش می یابد. اگر موضوع بی اهمیت بودن مولفه های ناخواسته در باند انتقالی در نظر گرفته شود، میتوان از $\Omega_s = \Omega_d + \Omega_{stop}$ نیز استفاده کرد. (بررسی کنید)

(b) اگر خطای طیف سیگنال خود دارای افت باشد می توان آنرا در R_s لحاظ کرد تا درجه فیلتر کاهش یابد. دقت شود که مقدار تضعیف باید نسبت به کوچکترین مولفه باند گذر در نظر گرفته شود

۷- تلاش برای رسیدن به حداقل فرکانس نمونه گیری موجب می شود درجه فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی در یک طرف و درجه فیلتر میان یاب از طرف دیگر بالا رود که به پیچیدگی مدار می انجامد که به هیچ وجه مطلوب نیست. برای حل مشکل روش مناسب آن است که

درجه فیلتر آنالوگ پائین نگاه داشته شود و نمونه برداری با فرکانس بالاتری صورت گیرد. سیگنال نمونه برداری شده سپس از فیلتر دیجیتال می توان درجه بالایی داشته باشد عبور داده شده و آنگاه فرکانس نمونه گیری به مقدار حداقل خود کاهش داده می شود. نحوه انجام این راهکار مناسب در فصل ۸ توضیح داده می شود.

۸- برای ساخت فیلتر آنالوگ از سری سازی فیلترهای درجه ۱ و ۲ به مقدار کافی استفاده میشود.



اگر درجه فیلتر بدست آمده بالا باشد آن را باید به درجات ۱ و ۲ تجزیه و سپس از مدارات نمونه فوق برای ساخت آن استفاده کرد.

مثال: فرض کنید طیف سیگنال بعد از فرکانس Ω_d برابر -20 dB افت داشته باشد (سیگنال ناشی از سیستم درجه ۱ باشد) مشخصات فیلتر باترورت ضد همپوشانی فرکانسی را تعیین کنید که (۱) اعوجاج باز اهمیت نداشته باشد (۲) فاز خطی باشد. برای این مثال ۱٪ خطا مجاز است و فرکانس نمونه گیری $5\Omega_d$ و $R_p=1\text{ dB}$ مطلوب است

حل: (۱) فرکانس نمونه گیری اگر $5\Omega_d$ منظور شود. بنابراین در $\Omega_{stop}=4\Omega_d$ مقدار تضعیف سیگنال برای رسیدن به ۱٪ خطا می یابد به 40 dB برسد. تضعیف خود سیگنال 12 dB است که 28 dB بقیه را باید فیلتر تامین کند. درجه فیلتری که $\Omega_p=\Omega_d$ ، $R_p=1\text{ dB}$ ، $\Omega_{stop}=4\Omega_d$ ، $R_s=28\text{ dB}$ باشد برابر است با

$$A = 10^{RS/20} = 10^{28/20} = 25.11$$

$$1 + \epsilon^2 = 10^{Rp/10} = 10^{1/10} \Rightarrow \epsilon = 0.5$$

$$N = \frac{\lg[\sqrt{A^2 - 1}/\epsilon]}{\lg \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} = \frac{\lg[\sqrt{25.11^2 - 1}/0.5]}{\lg 5} = 2.182 \approx 3$$

(۲) اگر فاز خطی مورد نیاز باشد

$$\Omega_{Lpp} = \Omega_d \pm 0.75\Omega_p$$

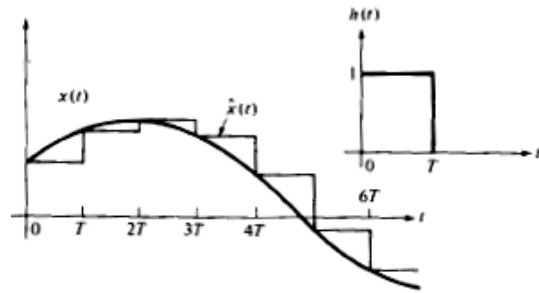
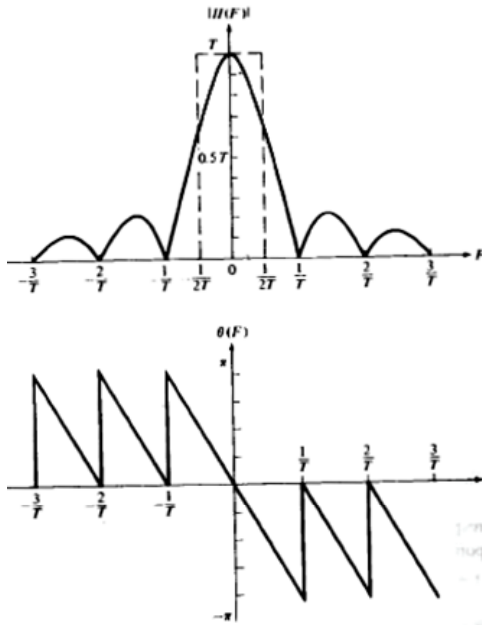
$$\Omega_s = 5\Omega_d = 5\Omega_p \Rightarrow N = \frac{\lg[\sqrt{A^2 - 1}/\epsilon]}{\lg \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} = \frac{1.17}{\lg 5} = 2.157$$

۳-۶-۲ (فیلتر میان یابی)

دیدیم که برای بازسازی سیگنال نمونه برداری شده می توان از فیلتر پائین گذر ایده آل استفاده کرد متأسفانه فیلتر مذکور قابل ساخت نیست لذا باید روش قابل استفاده ای پیدا کرد. به دنبال نمونه های از این فیلترها ارائه می شوند.

Zero Order Hold :ZOH(۱)

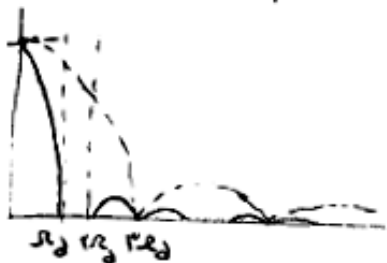
عمومی ترین فیلتری که مورد استفاده قرار می گیرد به شمار می آید. شکل نحوه ی عمل، پاسخ ضربه و دامنه و فاز پاسخ فرکانسی آن را نشان می دهد.



پاسخ فرکانسی این سیستم

$$H(F) = T \left(\frac{\sin \pi FT}{\pi FT} \right) e^{-j\pi FT}$$

است دامنه نشان می دهد که مشخصه ای مانند فیلتر پائین گذر داشته و فاز آن خطی است. دامنه ی آن در فرکانس $1/(2T)$ به $0.7T$ می رسد که برابر $3db$ افت است.



وقتی سیگنالی دیجیتالی به ZOH اعمال می شود سیگنالی خروجی $yd(t)$ سیگنالی پله پله بدست می آید این مسئله را طیف فرکانسی سیگنال خروجی نیز نشان می دهد. فرض کنید سیگنالی با فرکانس $3\Omega_d$ نمونه برداری شده و حالا به ZOH اعمال می گردد. شکل طیف سیگنال خروجی را نشان می دهد. طیف سیگنال خروجی با خط پر و طیف ZOH با نقطه چین نشان داده شده است. همچنانکه دیده میشود سیگنال خروجی علاوه بر برآمدگی اصلی (طیف سیگنال اصلی) مولفه های تضعیف شده ای را نیز به همراه دارد. این مولفه ها باعث ایجاد شکل پله پله گردیده اند برای

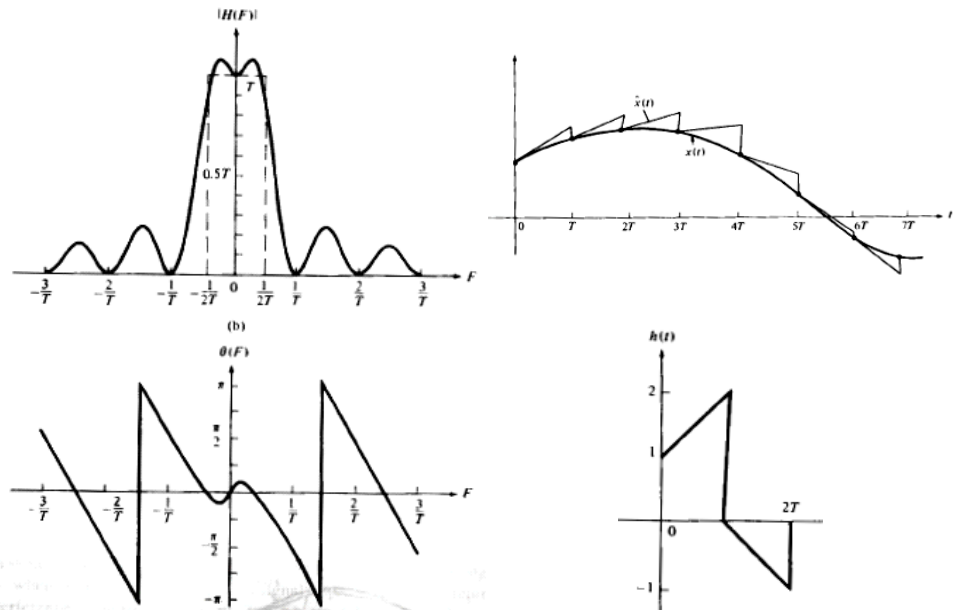
هموار کردن خروجی می باید از فیلتر کمکی استفاده کرد که مولفه ای ناخواسته را حذف کند. فیلتر مذکور باید $\Omega_p = \Omega_d$ (برای فاز خطی $\Omega_{pp} = \Omega_d$) و $\Omega_{stop} = \Omega_s - \Omega_d$ داشته باشد که Ω_s فرکانس نمونه برداری است در شکل فوق $\Omega_{stop} = 2\Omega_d$ است. مقدار R_p و R_s فیلتر را باید با توجه به کاربرد و دقت در استخراج خروجی تعیین کرد.

First Order Hold :FOH-۲

FOH برای بازسازی سیگنال از رابطه

$$y(t) = y(nT) + \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} (t - nT) \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

استفاده می کند شکلهای نحوه عملکرد، پاسخ ضربه، دامنه و فاز پاسخ فرکانسی آن را نشان می دهند. همچنانکه دیده می شود FOH نیز مانند فیلتری پائین گذر است و می توان دریافت که ناپیوستگی در خروجی آن ناشی از برآمدگیهای کناری است که مولفه های فرکانس بالا را عبور می دهد. فاز این سیستم در ناحیه $|F| < 1/(2T)$ رفتاری غیر خطی از خود نشان می دهد. پاسخ فرکانس این سیستم برابر است با



$$H(F) = T(1 + 4\pi^2 F^2 T^2)^{1/2} \left(\frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \right)^2 e^{j\Theta(F)} \quad \Theta(F) = -\pi F T + \tan^{-1} 2\pi F T$$

برای حذف ناپیوستگی در خروجی و هموار کردن آن می باید از فیلتر کمکی نظیر آنچه برای ZOH بیان شد استفاده شود.

۳- میان یاب خطی با تاخیر:

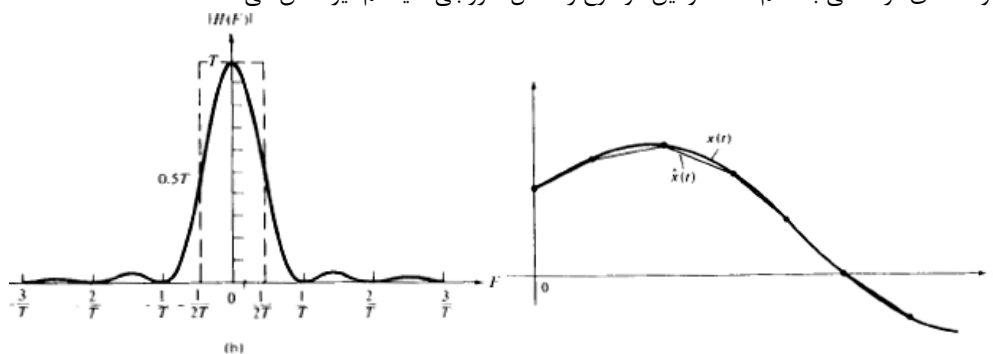
فرمول این سیستم

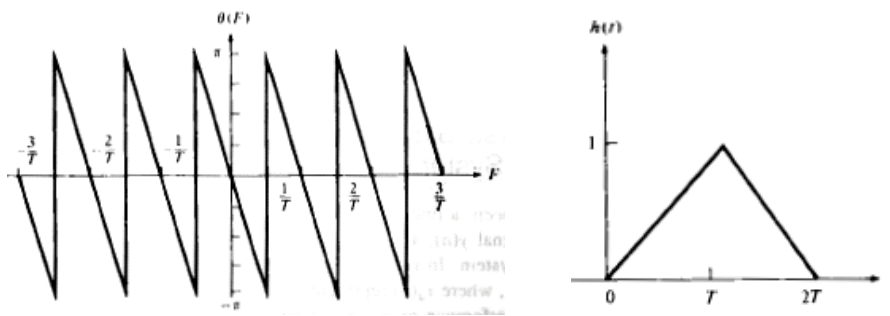
$$y(t) = y(nT - T) + \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T}(t - nT) \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

است. شکلها عملکرد، پاسخ ضربه، دامنه و فاز طیف آن را نشان می دهند. پاسخ فرکانسی این سیستم از رابطه

$$H(F) = T \left(\frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \right)^2 e^{-j2\pi F T}$$

بدست می آید. همچنانکه دیده می شود این سیستم نیز رفتاری پائین گذر دارد ولی به دلیل کوچک بودن سطح زیر گذر برآمدگیهای کناری انرژی مولفه های فرکانسی بالا کم گشته و این موضوع را شکل خروجی سیستم نیز نشان می دهد.





۴-عوجاج دامنه و افزایش فرکانس نمونه گیری :

با دقت در فرکانس ۳ میان یاب طرح شده میتوان یافت که برای محدود کردن ریبیل باند گذر به $1db$ فرکانس نمونه گیری که مطابق جدول زیر می باشد نیاز است علاوه بر این وقتی ریبیل باند گذر فیلتر مکمل را به آن اضافه کنیم نیاز به فرکانس نمونه گیری بالاتر پدید می آید.

فاز: خطی $ZOH: \Omega s = 4\Omega d$

فاز: غیر خطی $FOH: \Omega s = 2\Omega d$

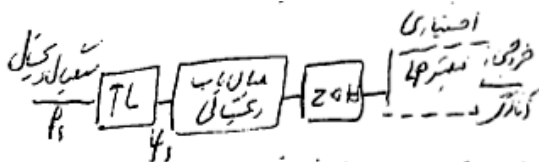
فاز: خطی $Linear interpolation: \Omega s = 6\Omega d$

برای رفع این مشکل راه حلی که وجود دارد این است که پردازش سیگنال دیجیتالی با حداقل فرکانس نمونه گیری ممکن انجام شود و در هنگام تبدیل سیگنال دیجیتالی به آنالوگ ابتدا فرا نمونه گیری شده و سپس به ZOH که ساده ترین سیستم است اعمال گردد در این وضعیت ناپیوستگی های خروجی به سهولت با فیلتری درجه پائین قابل هموار شدن است.

مثال: اگر فرکانس نمونه گیری از مقدار حداقل $2\Omega d$ به $10\Omega d$ افزایش باید پهنای باند انتقالی فیلتر مکمل به چه مقدار خواهد رسید. **الف)** $\Omega s = 2\Omega d$: در این حالت پهنای باند انتقالی برای فیلتر مکمل برابر صفر است و برای فیلتر کردن از فیلتر ایده آل باید استفاده شود که قابل ساخت نیست.

ب) $\Omega s = 10\Omega d$: در این حالت پهنای باند انتقالی $\Omega s - 2\Omega d = 8\Omega d$ است و نسبت لبه باند حذف به باند گذر 9 است. یک فیلتر درجه ۱ با این باند انتقالی مولفه های فرکانس بالا را حداقل $20db$ تضعیف می کند که هموار شدن قابل قبول سیگنال خروجی را به دنبال دارد.

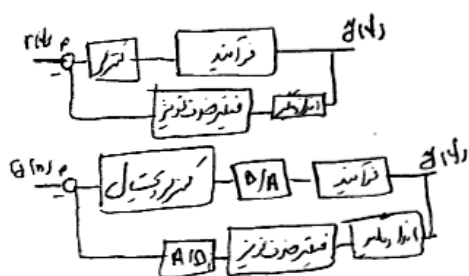
۵- خلاصه مطالب: اگر چه در این بند FOH و میان یاب خطی با تاخیرمورد بحث قرار گرفت ولی عموماً از ZOH و فیلتر میان یاب آنالوگ استفاده می شود. به نحوی که سیگنال دیجیتالی با به ZOH و سپس به فیلتر میان یاب آنالوگ اعمال می گردد. هر چقدر Ωs به $2\Omega d$ (یکوئیست ریت) نزدیکتر گردد درجه فیلتر میان یاب افزایش می یابد و پیچیدگی آن بیشتر می شود به نحوی که به ازای $\Omega s = 2\Omega d$ فیلتر پائین گذر ایده آل که قابل ساخت نیست مورد نیاز می گردد. نکته دیگر اینکه اگر $\Omega s < 4\Omega d$ شود عوجاج دامنه سیگنال تحت تاثیر دامنه طیف ZOH بیشتر از $1db$ می گردد. از آنجائیکه طرح فیلتر میان یاب آنالوگ با درجات بالا مشکل و دارای پیچیدگی است طرح جایگزین شکل را می توان مورد استفاده قرار داد که فیلتر میان یاب در قسمت دیجیتالی قرار میگیرد و طرح آن به نهایت ساده تر می شود در این طرح ابتدا فرکانس نمونه گیری افزایش داده شده و از فیلتر میان یاب دیجیتالی عبور داده می شود و در نهایت به ZOH اعمال می گردد. فیلتر LP اختیاری است که ممکن است اصلاً ضرورتی پیدا نکند.



۳-۶-۳ فرکانس نمونه گیری در سیستم حلقه بسته

شکل، سیستم کنترل آنالوگ و مشابه دیجیتالی آن را نشان می دهد در هر دو طرح فرآیند بطور طبیعی آنالوگ هستند.

الف) در سیستم کنترل T حذف نویز هم در طرح آنالوگ و هم دیجیتالی به یک اندازه اهمیت دارند و این فیلتر در صورت ضرورت T کار فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی را نیز انجام می دهد. مشخصات این فیلتر باید مانند فرآیند و کنترلر در طراحی کنترلر منظور شود.



(b) از آنجائیکه فرآیند پشت سر DAC قرار میگیرد و خود فیلتری پائین گذر است نیازی به فیلتر مکمل میان یاب نیز نیست.

(c) معیاری که در تعیین فرکانس نمونه گیری این سیستمها ارائه می شود و در اکثر موارد خوب جواب می دهد براساس t_r (زمان نمو) یا

Ω_c (محل تقاطع نمودار بد حلقه باز با خط 0 db) بیان می گردد به این ترتیب که

$$\Omega_s = (30-10)\Omega_c, \quad \text{یا} \quad F_s = (4-10)/t_r$$

می تواند انتخاب گردد. گفته می شود اگر سیستم رفتار غیر خطی داشته باشد ضرورت تعبیه فیلتر میان یاب بعد از DAC و در نظر گرفتن صفرها قطبهای آن در طراحی کمتر ضرورت پیدا می کند.

سوالات خودآزمایی

۱- کدامیک از سیگنال های زیر ، سیگنال های محدود ، توان ، انرژی هستند توان یا انرژی مربوطه را بدست آورید.

$$a) \cos(n) \quad b) \cos(n\pi/4) \quad c) 2^n \cos(n) \quad d) \{1, 0, 5, 4, 9, 10\} \quad e) 1/\sqrt{n} \cos(n)$$

(a) نامحدود ، غیر توان ، غیر انرژی، ∞ (b) محدود، غیر انرژی ، توانی (۰،۵)

(c) نامحدود، غیر انرژی ، غیر توانی (d) محدود ، انرژی (۳۲۲) ، غیر توانی (۰) (e) محدود، انرژی (۰،۷۵) ، غیر توانی (۰) ۲

$$f) \text{ رسانی } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad n(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad w(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$x_0(n) \in x_0(n) \quad x_0(n) \in x_0(n) \quad x_0(n) \in x_0(n) \quad x_0(n) \in x_0(n)$$

$$a) \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad b) \{-15, -8, 0, 2, -20, 0, 2\} \quad c) \{-2, 2, 3, 7, -1, 0, 3\}$$

$$d) \{1, -7, -4, 0, 4, 1, 1\} \quad e) \{15, 22, 1, 7, -43, 4, 31, 0, 12, -13, -2, 0, 2\}$$

۳- اگر $y(n)$ مزدوج متقارن و $h(n)$ مزدوج معکوس باشد حاصل ضرب این دو چگونه است .

(مزدوج متقارن معکوس)

۴- انرژی و دنباله های مزدوج متقارن و مزدوج متقارن معکوس دنباله های ذیل را بدست آورید.

$$a) H(n) = \{-2+j5, 4-j3, 0+j2, 2+j, -7+j2\} \quad b) H(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$c) H(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad d) H(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$r_{xx}(m) = \frac{9+11m^2+4m^4}{1+3m^2+2m^4}$$

باشد واریانس و متوسط آن را

۵- اگر خود همبستگی سیگنال تصادفی غیر پریودیک ایستائی

بدست آورید.

$$[m_x = \sqrt{V}, \sigma_x^2 = 4]$$

۶- کدامیک از سیگنال های ذیل پریودیک هستند

$$a) \cos(n\pi/4) \quad b) \cos(n\pi/8) \quad c) \cos(n\pi/4) \quad d) \cos(n\pi/4) \quad e) \cos(n\pi/8)$$

$$[N=12 \quad T=\frac{1}{f} \quad \text{برابر یک} \quad e) \quad T=\frac{1}{f} \quad \text{برابر یک} \quad c) \quad T=\frac{1}{f} \quad \text{برابر یک} \quad b) \quad N=4 \quad \text{برابر یک} \quad a) \quad N=4 \quad \text{برابر یک}]$$

۷- نمونه گیری از سیگنال $\cos(n\omega + p)$ به نتایج $\{1.4, 1.4, -1.4, -1.4\}$ انجامیده است پارامترهای سیگنال را تعیین می کند با این

نمونه ها چند سیگنال می توان ساخت.

$$[2 \cos(n(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) - \frac{\pi}{4}) \quad A=2, \quad p=-\frac{\pi}{4}, \quad \omega_0=\frac{\pi}{4}]$$

۸- برای پررود نمونه گیری شرطی بنویسید که سیگنال $\cos(20t)$ همچنان پریودیک باقی بماند.

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_s} = \frac{k}{N} : \text{Period} \rightarrow N$$

۹- با مراجعه به یک Data Book زمان تبدیل چند ADC و نوع آن را یادداشت کند.

$$[Ct = 4 \mu s \quad 86 \mu s \quad ADC0808, \quad Ct = 1.4 \mu s \quad \text{half flash}, \quad 86 \mu s, \quad PH0820]$$

۱۰- برای کوانتیزه کردن سیگنال $6.35 \cos(n\pi/3)$ با رزولوشن $\Delta=0.1$ به حداقل چند بیت نیاز است. توان سیگنال اصلی

کوانتیزه و سیگنال به نویز $10 \log[P_x/P_e]$ را بدست آورید.

$$[\frac{S}{N} = 46.35 \text{ dB} , P_c = 0.0005 , P_q = 20/105 , P_x = 20/12 \text{ dB}]$$

۱۱- برای سیگنالی که تا ۱۰ کیلو هرتز مولفه دارد (a) فرکانس نایکوئیست چند است (b) حداقل فرکانس نمونه گیری و نایکوئیست ریت را تعیین کنید (c) اگر فرکانس نمونه گیری ۸ کیلو هرتز در نظر گرفته شود کدام بخش از طیف خراب می شود. مولفه ۵ و ۷ کیلو هرتزی چگونه تغییر می کنند.

$$[\text{الف}) f_n = 10 \text{ kHz} , N.R = 20 \text{ kHz} \text{ اگر } H(f) = 0 \text{ باشد } f_s = 20 \text{ kHz} \text{ بفرستد } 20 \text{ kHz}]$$

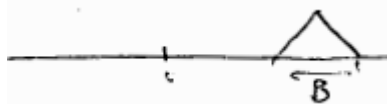
$$[\text{ب}) \text{طیف خراب می شود، به منزله ۵ کیلوهرتز در ۳ کیلوهرتز و ۷ کیلوهرتز در ۱ کیلوهرتز افت می کند}]$$

۱۲- فرض کند سیگنال $x(t) = \cos(2\pi \cdot 10t) + \cos(2\pi \cdot 200t) + \cos(2\pi \cdot 800t)$ در اختیار باشد. (a) اگر فرکانس نمونه گیری ۱۶۱۰ باشد به فیلتر ضد همپوشانی فرکانسی نیاز هست (b) اگر مولفه های زیر ۲۰۰ هرتز اهمیت داشته و قرار است F_s حداقل فاز و فاز خطی بماند و ۰.۰۱ نابجائی فرکانسی (۴۰db) مجاز و اعوجاج ۱db قابل قبول باشد مشخصات فیلتر الیپتیک چگونه خواهد بود (d) اگر از فیلتر درجه یک قرار باشد استفاده شود و مشخصات مطلوب مانند بند b باشد فرکانس نمونه گیری چقدر باید در نظر گرفته شود

$$[\text{الف}) \text{خیر} \text{ ب}) f_p = 800 \text{ Hz} , R_p = 40 \text{ dB} , R_s = 60 \text{ dB} , f_s = 1600 \text{ Hz} \text{ در فواصل فرکانسی } 400 \text{ Hz}]$$

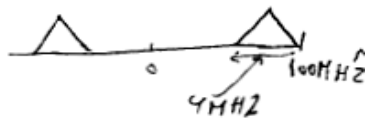
$$[\text{ج}) \text{نمی توانیم بگوییم چه اندازه نیاز داریم تا فواصل فرکانسی فرستاده شود زیرا ضرورت نداشته و فرکانس فرستاده ۱۶۰۰ Hz با ۱۶۱۰ Hz بسیار نزدیک است}]$$

۱۳- طیف سیگنالی در شکل داده شده است سیگنال حقیقی یا کمپلکس است حداقل فرکانس نمونه گیری چه مقداری می تواند باشد.



$$[\text{کمپلکس} , B_s = B]$$

۱۴- حداقل فرکانس نمونه گیری برای سیگنالی که طیف آن در شکل آمده است چه قدر می تواند باشد.



$$[104 \text{ MHz}]$$